

ЛИСТОК 11. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

АНАЛИЗ, 1 КУРС, 15.04.2014

Срок сдачи листка 30 апреля. ЛИСТОК СОСТОИТ ИЗ ДВУХ СТРАНИЦ.

Максимальная оценка за листок ставится, если по нему набрано не менее **двадцати** баллов. Сдача решения каждой задачи с ноликом или пункта задачи без нолика дает один балл, задачи со звездочкой — два балла. Кроме того, за каждую несданную задачу с ноликом снимется один балл. Задача с ноликом сдается только целиком, в остальных задачах каждый пункт оценивается отдельно.

11◊1 Докажите сходимость несобственных интегралов и вычислите их:

$$(a)^\circ \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3}; \quad (б)^\circ \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad a < b; \quad (в) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

11◊2 Исследуйте следующие несобственные интегралы на сходимость и абсолютную сходимость:

$$(a)^\circ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}; \quad (б)^\circ \int_0^1 \frac{dx}{(x-\sin x)^p}, \quad p \in \mathbb{R}; \quad (в) \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x^p}, \quad p \in \mathbb{R};$$

$$(г) \int_\pi^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^p + x^q}, \quad p, q \in \mathbb{R}; \quad (д)^\circ \int_0^{+\infty} \cos(x^3) dx.$$

11◊3 Докажите, что несобственные интегралы $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$ и $\int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx$ сходятся и вычислите их.

11◊4 Вытекает ли сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} f^3(x) dx$

а) из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} f(x) dx$; б) из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$?

11◊5 Пусть функция $f'(x) \in C^1(\mathbb{R})$, и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx$ сходится. Докажите, что существуют пределы $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

11◊6 Пусть интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ сходится. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ сходится интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x} f(x) dx$,

и выполнено равенство $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$.

11◊7* Пусть непрерывная функция $f(x) \geq 0$ монотонна, и пусть интеграл на бесконечности от нее сходится. Докажите, что

$$\lim_{h \rightarrow +0} h \sum_0^{\infty} f(nh) = \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

11◊8 Найдите предел $\lim_{x \rightarrow +0} \int_x^{2x} \frac{\sin^m t}{t^n} dt$, где $m, n \in \mathbb{N}$.

11◊9 Пусть непрерывная функция $f(x) \geq 0$ монотонна, и пусть интеграл на бесконечности от нее сходится. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow \infty} (xf(x)) = 0$.

11◊10 Пусть функция $f(x) \geq 0$ равномерно непрерывна на полуоси $[0, \infty)$, и пусть интеграл на бесконечности от нее сходится. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

11◊11* Вычислите при $a, b > 0$ интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$$

при выполнении одного из множеств условий:

(а) $f \in C[0, \infty)$, существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$.

(б) $f \in C[0, \infty)$, сходится интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$.

11◊12* Пусть $f \in C^1[1, \infty)$, причем $f(x), f'(x) > 0$, и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x) + f'(x)}$ сходится. Докажите, что

интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$ также сходится.

11◊13 Пусть $f \in C^2[1, \infty)$ и $f(x)f'(x) \leq 1$ при всех x . Докажите, что из сходимости интегралов $\int_1^{\infty} f^2(x) dx$

и $\int_1^{\infty} (f''(x))^2 dx$ следует сходимость интеграла $\int_1^{\infty} (f'(x))^2 dx$.

11◊14 Докажите, что сходится интеграл $\int_0^{\infty} \sin x \sin(x^2) dx$.

11◊15* Исследуйте сходимость интеграла $\int_{\pi}^{\infty} x |\sin x|^{x^2} dx$.

11◊16 Пусть функция $f(x) \geq 0$ удовлетворяет при некотором $a > 0$ и $q \in (0, 1)$ условию $f(x+a) < qf(x)$ при всех достаточно больших x . Докажите, что интеграл на бесконечности от $x^n f(x)$ сходится при любом $n \in \mathbb{N}$.

11◊17 Исследуйте сходимость интеграла $\int_1^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^p + \sin x}$ при $p > 0$.

11◊18* Пусть интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ сходится и равен I . Докажите, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$ также сходится и равен I .

11◊19 При каких $a, b > 0$ сходится интеграл $\int_b^{+\infty} \left(\sqrt{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x-b}} \right) dx$?