

**Дискретная математика**  
**Листок 6**

ВШЭ, факультет математики  
первый курс, четвёртый модуль

*Листок можно сдавать до 15.05.2014.*

1. Пусть  $B_n$  – числа Бернулли. Докажите, что

$$z \operatorname{cth} z = \sum_{n \geq 0} 4^n B_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \operatorname{ctg} z = \sum_{n \geq 0} (-4)^n B_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

2. Докажите, что

$$z \operatorname{ctg} z = 1 - 2 \sum_{k \geq 1} \frac{z^2}{k^2 \pi^2 - z^2}$$

3. Определим  $\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$ . Выразите значения  $\zeta(2n)$  через числа Бернулли. Докажите, что  $\zeta(2) = \pi^2/6$ . Вычислите  $\zeta(4)$ ,  $\zeta(6)$ ,  $\zeta(8)$ .

4. Определим тангенциальные числа  $T_{2n-1}$  по формуле  $\operatorname{tg} z = \sum_{n \geq 1} T_{2n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ . Докажите, что

$$T_{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{4^n (4^n - 1)}{2n} B_{2n}.$$

5. Докажите, что  $T_{2n+1}$  кратно  $2^n$ .

6. Докажите, число беспорядков  $d_n$  является ближайшим целым числом к  $n!/e$ .

7. Докажите, что

$$d_n = n d_{n-1} + (-1)^n, \quad d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}).$$

Найдите эфп чисел  $d_n$ .

8. Пусть  $h_n$  – число перестановок мультимножества  $(1, 1, 2, 2, \dots, n, n)$ , таких что никакие два последовательных члена перестановки не равны. Например,  $h_2 = 2$  – перестановки  $(1, 2, 1, 2)$ ,  $(2, 1, 2, 1)$ . Вычислите  $h_n$ .

9. Пусть  $\mu_n$  – последовательность Мёбиуса. Докажите, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-\mu_n/n} = e^x.$$

10. Пусть  $a_n$  равно сумме  $k$ -ых степеней всех делителей числа  $n$ . Выразите производящую функцию Дирихле последовательности  $a_n$  через дзета-функцию.