

Дискретная математика
Семинар 12

ВШЭ, факультет математики
первый курс, четвёртый модуль

1. Определим $S_m(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^m$. Вычислите $S_m(n)$ при $m \leq 4$.
2. Докажите, что $S_m(n)$ при фиксированном m является многочленом от n степени $m + 1$.
3. Найдите старший и следующий за ним коэффициенты многочленов из задачи 2.
4. Определим числа Бернулли рекуррентным соотношением:

$$B_0 = 1, \quad \sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} B_j = 0, \quad m > 0.$$

Вычислите B_j при $j \leq 6$.

5. Докажите, что эф чисел Бернулли равна $\frac{z}{e^z - 1}$.
6. Докажите, что $B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0$.
7. Проверьте, что при $m = 1, 2, 3$

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}.$$

Докажите эту формулу при общем m .