Листок 2

2.1. Перечислите с точностью до изоморфизма все двумерные коммутативные алгебры над $\mathbb{C}$: **а)** с единицей; **б)** не обязательно с единицей.

2.2. Перечислите с точностью до изоморфизма все двумерные коммутативные алгебры над $\mathbb{R}$: **а)** с единицей; **б)** не обязательно с единицей.

2.3. Докажите, что: **а)** $\mathbb{Z}[i]/(2)$ не является полем;
б) $\mathbb{Z}[i]/(3)$ является полем из девяти элементов;
в) $\mathbb{Z}[i]/(n)$ является полем тогда и только тогда, когда $n \in \mathbb{N}$ — простое число, не равное сумме квадратов двух целых чисел.

2.4. Докажите, что кольцо $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ не изоморфно $\mathbb{C}[x]$, но его поле частных изоморфно $\mathbb{C}(x)$.

Указание. Синус и косинус рационально выражаются через тангенс половинного угла.

2.5. Докажите, что любое кольцо, заключённое между кольцом главных идеалов A и его полем частных, само является кольцом главных идеалов.

2.6. Верно ли, что конечное коммутативное кольцо без делителей нуля всегда является полем?

2.7. Пусть $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ — алгебра многочленов. Предположим, что $f_1,\ldots,f_n \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$. Докажите, что:

а) Отображение φ, при котором $\varphi(g(x_1,\ldots,x_n)) \mapsto g(f_1,\ldots,f_n)$, является эндоморфизмом (гомоморфизмом в себя) $\mathbb{C}$-алгебры $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$.

б) Если при этом φ — автоморфизм (т.е. взаимно-однозначное отображение), то *якобиан*
$$J = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$$
является ненулевой константой.

в) Если $h = h(x_2,\ldots,x_n)$, то отображение Ψ, при котором
$$\Psi(g(x_1,\ldots,x_n)) = g(x_1+h, x_2,\ldots,x_n),$$
является автоморфизмом алгебры $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$.

2.8. Пусть $\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_n]]$ — алгебра формальных степенных рядов. Предположим, что $f_1,\ldots,f_n \in \mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_n]]$ необратимы (т.е. имеют нулевые свободные члены). Докажите, что:

а) Отображение φ, при котором $\varphi(g(x_1,\ldots,x_n)) \mapsto g(f_1,\ldots,f_n)$, является эндоморфизмом $\mathbb{C}$-алгебры $\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_n]]$.

б) φ — автоморфизм тогда и только тогда, когда якобиан
$$J = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$$
имеет ненулевой свободный член.

Предупреждение. Не пытайтесь решить задачу, обратную к задаче 2.7 б). Это может привести к моральной травме.