

Задачи для семинара 3

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций.

3.1. Найдите каноническое разложение фактора решетки \mathbb{Z}^3 по решетке, порожденной векторами $(7, 2, 3)$, $(21, 8, 9)$ и $(5, -4, 3)$.

3.2. Найдите взаимные базисы и каноническое разложение фактора решетки \mathbb{Z}^3 по подрешетке, порожденной векторами $(2, -4, 6)$, $(6, -6, 10)$, $(2, 5, 8)$ и $(6, 0, 5)$.

3.3. Найдите в абелевой группе с образующими a, b, c и соотношениями

$$a + b + 4c = 2a - b + 2c = 0,$$

порядок элемента $a + 2c$.

3.4. а) Пусть порядок конечной абелевой группы G делится на m . Покажите, что в G есть подгруппа порядка m .

б) Верно ли это для неабелевых групп?

3.5. Пусть $L \subset \mathbb{Z}^n$ — решетка полного ранга. Докажите, что объем параллелепипеда, натянутого на ее базис e_1, \dots, e_n , не зависит от выбора базиса. Чему он равен?

3.6. Пусть для конечно порожденных модулей M, N, L над кольцом главных идеалов A известно, что $M \oplus L \cong N \oplus L$. Докажите, что $M \cong N$.

3.7. Пусть A — произвольное кольцо. Приведите пример несвободного подмодуля в свободном A -модуле.

3.8 (Формула Пика). **а)** Пусть $v, w \in \mathbb{Z}^2$ — два линейно независимых над \mathbb{R} целых вектора, Π — натянутый на них параллелограмм. Покажите, что объем Π (то есть число элементов в фактормодуле $\mathbb{Z}^2/\langle v, w \rangle$) равно $a + b/2 + 1$, где a и b — число целых точек строго внутри P и строго внутри его ребер.

б) Обобщите эту формулу на размерности 3 и выше.