

ЛИСТОК 6. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

УРЧП, 3-4 курс, 17.04.2014

6◊1 Найдите все гармонические в \mathbb{R}^n функции, принадлежащие $L_2(\mathbb{R}^n)$.

6◊2 Найдите все гармонические в \mathbb{R}^2 функции $u(x, y)$, для которых

$$u_x(x, y) < u_y(x, y)$$

при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

6◊3 Пусть

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 1, \quad (x, y) \in D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Может ли $u(x, y)$ иметь внутри D_1

а) максимум;

б) минимум?

6◊4 Пусть u — гармоническая функция в $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ функция. Найдите

$$\int_0^{2\pi} u_{rr}(1, \varphi) d\varphi.$$

6◊5 Пусть $D_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1, x_3 > 0\}$, функция $u(x_1, x_2, x_3)$ определена и непрерывна в \overline{D}_+ , равна нулю при $x_3 = 0$ и является гармонической в D_+ . Верно ли, что $u(x)$ можно продолжить до функции, гармонической всюду в D_+ ?

6◊6 Пусть $u_{xx} + u_{yy} = 1$, $(x, y) \in \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Что больше:

$$\int_{S_1} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) ds \quad \text{или} \quad \int_{S_2} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) ds,$$

где S_1 и S_2 сферы с центром в начале координат и радиусами 1 и 2, соответственно.

6◊7 Существует ли положительная гармоническая функция в шаре $D_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, такая, что

$$u(0, 0, 0) = 1, \quad u(0, 0, 1/2) = 10?$$

6◊8* Постройте пример ограниченной в шаре $D_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ гармонической функции $u(x)$, такой, что $\|\text{grad } u\|$ неограничен в D_1 .

6◊9* Пусть функция $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = u(x),$$

а также оценке

$$|u(x)| \leq C, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Докажите, что $u \equiv 0$ в \mathbb{R}^3 .