Задачи для семинара 4

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций.

4.1. Верно ли, что любой подмодуль и любой фактормодуль конечно порожденного модуля над кольцом главных идеалов тоже конечно порожден?

4.2. Пусть для любого $m \in \mathbb{N}$ число элементов порядка m в двух конечных абелевых группах A и B одинаково. Покажите, что $A \cong B$.

4.3. Сколько элементов порядка p^s в абелевой группе $\mathbb{Z}/(p^{n_1}) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/(p^{n_k})$?

4.4. Пусть $N \subset \mathbb{Z}^n$ — решетка ранга $n-1$, получаемая при ортогональном проецировании $\mathbb{Z}^n$ на плоскость $\{x_1 + \cdots + x_n = 0\}$, а $L \subset N$ — подрешетка, состоящая из всех целых точек, сумма координат которых равна 0.

а) Найдите число элементов в N/L.

б) Найдите примарное разложение N/L.

4.5. Выведите из теоремы о структуре конечно порожденных модулей над кольцами главных идеалов теорему Гамильтона–Кэли.

4.6. Придумайте и докажите теорему о каноническом виде линейного оператора над $\mathbb{R}$.