Задачи, после номера которых стоит буква “B”, не являются обязательными. Решившие их получат бонусные баллы.

9.1. Пусть X, Y — топологические векторные пространства. Докажите, что
(a) линейный оператор $T\colon X \to Y$ непрерывен $\iff$ он непрерывен в нуле;
(b) множество $\mathscr{L}(X, Y)$ непрерывных линейных операторов из X в Y — векторное подпространство в $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$.

9.2. Докажите, что векторное пространство с топологией, порожденной семейством полунорм, является топологическим векторным пространством.

9.3. Докажите, что топология на векторном пространстве X, порожденная семейством полунорм P, хаусдорфова тогда и только тогда, когда для каждого $0 \neq x \in X$ найдется такая полунорма $p \in P$, что $p(x) > 0$.

9.4. Для полунормы p на векторном пространстве X положим $U_p = \{x \in X : p(x) < 1\}$ и $\overline{U}_p = \{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$. Докажите, что
(a) $U_p \subseteq U_q \iff \overline{U}_p \subseteq \overline{U}_q \iff U_p \subseteq \overline{U}_q \iff q \leqslant p$;
(b) функционалы Минковского множеств U_p и $\overline{U}_p$ совпадают с p.

9.5. Докажите, что выпуклая и абсолютно выпуклая оболочки открытого подмножества в топологическом векторном пространстве открыты.

9.6. На каких из следующих топологических векторных пространств существует хотя бы одна непрерывная норма?
(a) $\mathbb{K}^X$ (где X — множество);
(b) $C(X)$ (где X — тихоновское[1] топологическое пространство);
(c) пространство голоморфных функций $\mathscr{O}(U)$ на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{C}$;
(d) $C^\infty[a, b]$;
(e) $C^\infty(U)$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество;
(f) $C_c(U)$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество;
(g) $C_c^\infty(U)$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество.

9.7. (a)-(g) Какие пространства из предыдущей задачи нормируемы?

9.8. Докажите, что хаусдорфова локально выпуклая топология на векторном пространстве, порожденная семейством полунорм P, метризуема тогда и только тогда, когда P эквивалентно некоторому своему не более чем счетному подсемейству.

Указание. Если $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность полунорм, то функция

$$\rho(x, y) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}$$

удовлетворяет неравенству треугольника.

9.9. (a)-(g) Какие пространства из задачи 9.6 метризуемы? (Засчитывается, только если сдана предыдущая задача.)

9.10-B. Докажите, что на конечномерном векторном пространстве любые два семейства полунорм, каждое из которых задает хаусдорфову топологию, эквивалентны.

[1] Хаусдорфово топологическое пространство X называется *тихоновским*, если для каждого замкнутого множества $F \subset X$ и каждого $x \in X \setminus F$ найдется такая непрерывная функция $f\colon X \to [0, 1]$, что $f|_F = 0$ и $f(x) = 1$. Тихоновскими являются все метризуемые пространства (докажите!), все хаусдорфовы компакты и, более общим образом, все *нормальные* пространства (см. любой учебник по общей топологии).

9.11. Пусть X — множество.
(a) Докажите, что для любой функции $f \in \mathbb{K}^X$ оператор умножения $M_f \colon \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^X$, $M_f(g) = fg$, непрерывен.
(b) Опишите все непрерывные линейные функционалы на пространстве $\mathbb{K}^X$.

9.12. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Докажите, что любой линейный дифференциальный оператор $\sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha D^\alpha$ в пространстве $C^\infty(U)$ (где $a_\alpha \in C^\infty(U)$) непрерывен.

9.13. Пусть $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ и $p \in [1, +\infty)$. Для $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ положим $c_n(f) = f^{(n)}(0)/n!$. Докажите, что компактно-открытая топология на $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ порождается любым из следующих эквивалентных семейств полунорм:
(a) $\|f\|_{r,p} = \Bigl(\sum_{n=0}^\infty (|c_n(f)| r^n)^p\Bigr)^{1/p} \quad (0 < r < R)$;
(b) $\|f\|_{r,\infty} = \sup_{n \geqslant 0} |c_n(f)| r^n \quad (0 < r < R)$;
(c)-B $\|f\|^I_{r,p} = \Bigl(\int_{|z|=r} |f(z)|^p \, d\mu(z)\Bigr)^{1/p} \quad (0 < r < R)$, где μ — мера длины на окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$.

9.14. Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество. Докажите, что компактно-открытая топология на $\mathscr{O}(U)$ совпадает с топологией, унаследованной из $C^\infty(U)$.

9.15-B. Пространство *быстро убывающих последовательностей* $s(\mathbb{Z})$ определяется так:

$$s(\mathbb{Z}) = \Bigl\{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : \|x\|_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| |n|^k < \infty \ \forall k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\Bigr\}.$$

Топология на $s(\mathbb{Z})$ порождается последовательностью полунорм $\{\| \cdot \|_k : k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$. Постройте топологический изоморфизм $C^\infty(\mathbb{T}) \cong s(\mathbb{Z})$. (*Указание:* сопоставьте каждой функции из $C^\infty(\mathbb{T})$ последовательность ее коэффициентов Фурье.)

9.16-B. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Для каждого $p \in (0, 1)$ определим векторное пространство $L^p(X, \mu)$ так же, как и при $p \geqslant 1$. Для $f \in L^p(X, \mu)$ положим

$$|f|_p = \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x).$$

(a) Докажите, что $\rho(f, g) = |f - g|_p$ — метрика на $L^p(X, \mu)$.
(b) Докажите, что $L^p(X, \mu)$ локально выпукло лишь в том случае, когда оно конечномерно.
(c) Докажите, что $L^p[0, 1]^* = \{0\}$.

9.17-B. Пусть (X, μ) — пространство с конечной мерой. Обозначим через $L^0(X, \mu)$ пространство классов эквивалентности μ-измеримых функций на X (как обычно, функции эквивалентны, если они равны почти всюду). Для $f \in L^0(X, \mu)$ положим

$$|f|_0 = \int_X \frac{|f(x)|}{1 + |f(x)|} \, d\mu(x).$$

(a) Докажите, что $\rho(f, g) = |f - g|_0$ — метрика на $L^0(X, \mu)$.
(b) Докажите, что сходимость по метрике из п. (a) — это то же самое, что сходимость по мере.
(c) Докажите, что $L^0(X, \mu)$ локально выпукло лишь в том случае, когда оно конечномерно.
(d) Докажите, что $L^0[0, 1]^* = \{0\}$.