Задачи, после номера которых стоит буква “B”, не являются обязательными. Решившие их получат бонусные баллы.

10.1. Пусть e_n — числовая последовательность с единицей на n-м месте и нулем на остальных. Исследуйте последовательность (e_n) на слабую сходимость в пространствах c_0 и ℓ^p $(1 \leqslant p < \infty)$.

10.2. Докажите, что последовательность непрерывных функций на отрезке слабо сходится тогда и только тогда, когда она равномерно ограничена и сходится поточечно.

10.3. Пусть T_ℓ и T_r — операторы левого и правого сдвига в ℓ^2. Исследуйте последовательности $(T_\ell^n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(T_r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ на сходимость
(a) по норме в $\mathscr{B}(\ell^2)$;
(b) в сильной операторной топологии на $\mathscr{B}(\ell^2)$;
(c) в слабой операторной топологии на $\mathscr{B}(\ell^2)$.

10.4. Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара векторных пространств. Докажите, что
(a) $\dim X < \infty \iff \dim Y < \infty \iff$ слабая топология $\sigma(X,Y)$ нормируема;
(b) слабая топология $\sigma(X,Y)$ метризуема $\iff$ размерность Y не более чем счетна;
(c) слабая топология на бесконечномерном нормированном пространстве и слабая* топология на пространстве, сопряженном к бесконечномерному банахову пространству, неметризуемы.

10.5. Докажите, что слабая топология на пространстве $\mathbb{K}^S$ (где S — множество) совпадает с исходной.

10.6. Пусть X и Y — нормированные пространства. Обозначим через SOT, WOT и NT соответственно сильную операторную топологию, слабую операторную топологию и топологию, задаваемую операторной нормой на $\mathscr{B}(X,Y)$.
(a) Докажите, что WOT $\subseteq$ SOT $\subseteq$ NT.
(b) Докажите, что если Y бесконечномерно, то WOT $\neq$ SOT.
(c) Докажите, что если X бесконечномерно, то SOT $\neq$ NT.

10.7. Приведите пример разрывного линейного оператора между хаусдорфовыми ЛВП X и Y, который **(a)** непрерывен относительно слабых топологий на X и Y; **(b)** переводит ограниченные множества в ограниченные.

10.8. Приведите пример банахова пространства X и векторного подпространства $Y \subset X^*$, которое замкнуто по норме, но не замкнуто в слабой* топологии.

10.9-B. Докажите, что в пространстве ℓ^1 всякая слабо сходящаяся последовательность сходится по норме.

10.10. (a) Докажите, что пространство c_0 секвенциально плотно в своем втором сопряженном относительно слабой* топологии.
(b)-B Приведите пример банахова пространства, не обладающего свойством из п. (a).

Напомним (см. лекцию), что ограниченный линейный оператор из рефлексивного банахова пространства X в банахово пространство Y компактен тогда и только тогда, когда он секвенциально непрерывен как отображение из (X, wk) в Y.

10.11. (a) Пусть X и Y — банаховы пространства. Докажите, что ограниченный линейный оператор $T\colon X \to Y$ непрерывен как отображение из (X, wk) в Y тогда и только тогда, когда его образ конечномерен. (Таким образом, в сформулированной выше теореме слово «секвенциально» отбросить нельзя.)
(b)-B Постройте пример, показывающий, что в сформулированной выше теореме требование рефлексивности X отбросить нельзя.
(c)-B Пусть X и Y — банаховы пространства. Докажите, что ограниченный линейный оператор $T\colon X \to Y$ компактен тогда и только тогда, когда его ограничение на единичный шар $\mathbb{B}_X$ непрерывно как отображение из $(\mathbb{B}_X, \mathrm{wk}|_{\mathbb{B}_X})$ в Y.