6. Шестая лекция, 14 мая 2014 г.

6.1. **Полилинейные отображения.**

Определение 6.1. Пусть $V_1, \dots, V_k, W$ — векторные пространства (над некоторым полем K, которое мы фиксируем по крайней мере до конца этой лекции). Отображение

$$\varphi\colon V_1 \times \dots \times V_k \to W$$

называется *полилинейным*, если оно линейно по каждому из аргументов:

$$\varphi(\dots, \lambda v_i + \mu v_i', \dots) = \lambda\varphi(\dots, v_i, \dots) + \mu\varphi(\dots, v_i', \dots).$$

Пример 6.2. 1-линейные отображения — это обычные линейные отображения $\varphi\colon V_1 \to W$. Если $W = K$, то 1-линейные отображения — это линейные функционалы на V_1, а 2-линейные отображения — это билинейные формы.

Полилинейные отображения можно складывать и умножать на элементы поля K. Поэтому они образуют векторное пространство. Будем обозначать его через $\mathrm{Hom}(V_1, \dots, V_k; W)$. Несложно найти его размерность:

Предложение 6.3. *Пусть* $\dim V_i = d_i$, $\dim W = d$. *Тогда*

$$\dim \mathrm{Hom}(V_1, \dots, V_k; W) = d_1 \dots d_k \cdot d.$$

Доказательство. Фиксируем базисы в наших векторных пространствах: пусть $e_1^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)}$ — базис в V_i, $e_1, \dots, e_d$ — базис в W. В силу полилинейности отображение φ однозначно определяется своими значениями на всевозможных наборах базисных векторов $\varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, \dots, e_{\alpha_k}^{(k)})$; если $v_i = \sum x_{\alpha_i}^{(i)} e_{\alpha_i}^{(i)}$, то

$$\varphi(v_1, \dots, v_k) = \sum_{1 \le \alpha_i \le d_i} x_{\alpha_1}^{(1)} \dots x_{\alpha_k}^{(k)} \varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, \dots, e_{\alpha_k}^{(k)}).$$

Разложив каждый из векторов $\varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, \dots, e_{\alpha_k}^{(k)})$ по базису $e_1, \dots, e_d$ пространства W, получим $(k+1)$-мерную матрицу размера $d_1 \times \dots \times d_k \times d$, однозначно определяющую отображение φ.

Предъявим базис пространства $\mathrm{Hom}(V_1, \dots, V_k; W)$. Его образуют, например, следующие отображения:

$$\delta_{(i_1, \dots, i_k)}^j\colon (e_{\alpha_1}^{(1)}, \dots, e_{\alpha_k}^{(k)}) \mapsto \begin{cases} e_j, & \text{если } (i_1, \dots, i_k) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k); \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь $1 \le j \le d$, $1 \le i_r \le d_r$. $\square$

6.2. **Тензорное произведение.** Пусть V, W — векторные пространства с базисами $\{e_i \mid i \in I\}$ и $\{f_j \mid j \in J\}$ соответственно (вообще говоря, не предполагается, что множества I и J конечны).

Предложение 6.4. *Следующие свойства билинейного отображения $\varphi V \times W \to U$ эквивалентны:*

(1) *$\varphi(e_i, f_j)$ составляют базис в W;*
(2) *для любого $u \in U$ существует единственное представление $u = \sum_{i\in I} \varphi(e_i, w_i)$, где $w_i \in W$;*
(3) *для любого $u \in U$ существует единственное представление $u = \sum_{j\in J} \varphi(v_j, f_j)$, где $v_j \in V$.*

Доказательство. Докажем, что (1) эквивалентно (2). Действительно, если $u = \sum_{i\in I, j\in J} x_{ij}\varphi(e_i, f_j)$, то $u = \sum_{i\in I} \varphi(e_i, w_i)$, где $w_i = \sum_{j\in J} x_{ij} f_j$ (здесь мы пользуемся линейностью φ по второму аргументу). Аналогично доказывается, что (1) эквивалентно (3). $\square$

Следствие 6.5. *Выполнение условия (1) не зависит от выбора базисов в V и W.*

Доказательство. Действительно, условие (1) эквивалентно условию (3), которое никак не использует выбор базиса в V. По тем же причинам (1) не зависит от выбора базиса в W. $\square$

Определение 6.6. *Тензорное произведение* пространств V и W — это векторное пространство T вместе с билинейным отображением

$$\otimes\colon V \times W \to T,$$

удовлетворяющим условию: если $\{e_i \mid i \in I\}$ и $\{f_j \mid j \in J\}$ — базисы в V и W соответственно, то $\{e_i \times f_j\}$ — базис в T.

В силу предыдущего следствия выполнение последнего условия не зависит от выбора базисов в V и W.

Очевидно, что для любых V и W такие билинейное отображение и пространство T существуют: достаточно взять в качестве T пространство, порождённое базисными элементами t_{ij}, где $i \in I$, $j \in J$, и определить отображение по правилу $e_i \otimes f_j \mapsto t_{ij}$. Кроме того, легко убедиться в его единственности:

Предложение 6.7. *Пространство T и отображение $\otimes$ заданы однозначно в следующем смысле: если $(T_1, \otimes_1)$ и $(T_2, \otimes_2)$ — два тензорных произведения пространств V и W, то существует единственный изоморфизм*

$$\psi\colon T_1 \to T_2, \qquad \psi(v \otimes_1 w) = v \otimes_2 w \qquad \forall v \in V, w \in W.$$

Доказательство. Искомый изоморфизм задаётся на базисных элементах по правилу $\psi(e_i \otimes_1 f_j) = e_i \otimes_2 f_j$. $\square$

Итак, пространство T и отображение $\otimes$ определены однозначно по V и W. Будем обозначать T через $V \otimes W$. Из явного описания базиса в $V \otimes W$ немедленно следует такое

Предложение 6.8. *Если V и W конечномерны, то* $\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$.

Следующий пример показывает, как обстоит дело в случае счётномерных пространств.

Пример 6.9. Пусть $V = K[x]$, $W = K[y]$. Тогда $K[x] \otimes K[y] \cong K[x, y]$.

Действительно, изоморфизм строится по правилу: $f(x) \otimes g(y) \mapsto f(x)g(y)$. $K[x, y]$ действительно будет тензорным произведением $K[x]$ и $K[y]$, т.к. множество образов пар базисных векторов (x^m, y^n) образует базис $\{x^m y^n\}$ в $K[x, y]$.

6.3. **Универсальное свойство.** Оказывается, что $V \otimes W$ является в каком-то смысле "самым главным" из пространств, которые могут быть образами билинейных отображений из $V \times W$.

Предложение 6.10 (универсальное свойство тензорного произведения)**.** *Для любого билинейного отображения* $\varphi\colon V \times W \to U$ *существует единственное* линейное *отображение* $F\colon V \otimes W \to U$, *для которого* $\varphi(v, w) = F(v \otimes w)$.

Доказательство. Искомое отображение задаётся на базисных элементах пространства $V \otimes W$:

$$F(e_i \otimes f_j) := \varphi(e_i, f_j).$$

□

Замечание 6.11. Можно (и в каком-то смысле даже более правильно) принять универсальное свойство за определение $V \otimes W$ и после этого доказать существование пространства и отображения, определяемого универсальным свойством.

Упражнение 6.12. Выведите из универсального свойства предложение 6.7 (т.е. утверждение о том, что тензорное произведение определено однозначно с точностью до изоморфизма).

6.4. **Расширения полей.** Это важный пример, показывающий, как тензорное произведение встречается "в реальной жизни". Пусть $L \supset K$ — поле, содержащее основное поле K в качестве подполя (например, $L = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$). В частности, L является векторным пространством над K. Пусть V — какое-то еще векторное пространство над K. Рассмотрим тензорное произведение

$$V(L) = L \otimes_K V.$$

Это векторное пространство над K, но его несложно превратить в векторное пространство над L; для этого определим в $V(L)$ умножение на элементы из L так:

$$\lambda(\mu \otimes v) = \lambda\mu \otimes v.$$

Можно считать, что V вкладывается в $V(L)$ как векторное пространство над K: при вложении $v \mapsto 1 \otimes v$. Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис V как векторного пространства над K, то векторы $1 \otimes e_1, \ldots, 1 \otimes e_n$ будут образовывать базис $V(L)$ *как векторного пространства над* L. В частности, $\dim_K V = \dim_L V(L)$. Таким образом, про $V(L)$ можно думать как про V, в котором мы разрешили умножать на скаляры из L, а не только из K.

Обратно, $V(L)$ можно рассматривать как векторное пространство над K размерности $\dim_K V \cdot \dim_K L$, базис в котором образован элементами вида $\theta_i \otimes e_j$. Здесь $\theta_1, \ldots, \theta_d$ — базис L как векторного пространства над K.

Например, в случае $L = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ мы получаем утверждение о том, что всякий вектор из $V(\mathbb{C})$ представим в виде $v + iw$, где $v, w \in V$. В этом случае пространство $V(\mathbb{C})$ называется *комплексификацией* пространства V.

6.5. **Ещё примеры тензорных произведений.** Далее V и W будут конечномерными векторными пространствами, с базисами $\{e_1, \ldots, e_m\}$ и $\{f_1, \ldots, f_n\}$ соответственно. Пусть $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ и $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ — двойственные базисы в V^* и W^* соответственно.

Рассмотрим произведение $V^* \times W$. Определим отображение из него в пространство $\mathrm{Hom}(V; W)$, т.е. в пространство линейных отображений из V в W, по следующему правилу. Паре $\alpha \in V^*$, $w \in W$ будет сопоставляться отображение $\alpha \otimes w$, для которого

$$(\alpha \otimes w)(v) = \alpha(v) \cdot w.$$

Легко видеть, что $\mathrm{Ker}(\alpha \otimes w) = \mathrm{Ker}\,\alpha$, а $\mathrm{Im}(\alpha \otimes w) = \langle w \rangle$. Поэтому все отображения вида $\alpha \otimes w$ имеют ранг 1. Легко видеть, что верно и обратное: всякое отображение из V в W ранга 1 имеет вид $\alpha \otimes w$.

Мы получили билинейное отображение $V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V; W)$. По универсальному свойству, оно соответствует некоторому линейному отображению $V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$. Посмотрим на то, куда оно переводит базисные векторы, т.е. $\xi_i \otimes f_j$. Отображение, соответствующее паре базисных векторов $\xi_i \otimes f_j$, записывается матричной единицей E_{ji}. Эти матрицы образуют базис пространства $\mathrm{Hom}(V, W)$, значит, полученное отображение есть изоморфизм. Мы доказали

Предложение 6.13. *$V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V; W)$.*

Замечание 6.14. Обратите внимание, что в образе билинейного отображения $V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V; W)$ содержатся *не все* линейные отображения, а только имеющие ранг 1. Однако каждое линейное отображение может быть представлено в виде линейной комбинации отображений ранга 1. Более подробно мы обсудим это в следующей лекции.

Упражнение 6.15. Рассуждая аналогично, покажите, что
$$V^* \otimes W^* \cong \mathrm{Hom}(V, W; K)$$
(правая часть есть пространство билинейных форм на $V \times W$).

6.6. **Свойства тензорного произведения.**

Предложение 6.16. *Имеют место следующие канонические (т.е. не зависящие от выбора базисов) изоморфизмы:*

(1) $V \otimes W \cong W \otimes V$;
(2) $V \otimes (W \otimes U) \cong (V \otimes W) \otimes U$;
(3) $V \otimes (W \oplus U) \cong V \otimes W \oplus V \otimes U$.

Упражнение 6.17. Докажите это предложение.

Из этого предложения, в частности, следует, что можно говорить о $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$, не заботясь о порядке расстановки скобок.

Упражнение 6.18. Дайте определение тензорного произведения нескольких пространств, аналогичное 6.6, и докажите, что полученное пространство изоморфно $(\dots(V_1 \otimes V_2) \otimes \dots \otimes V_k)$.

Для тензорного произведения k пространств верны (с очевидными модификациями) все те факты, которые мы доказывали в прошлой лекции для тензорного произведения двух пространств. Так, имеется изоморфизм
$$\mathrm{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_k; W) \cong \mathrm{Hom}(V_1, \dots, V_k; W),$$
определяемый по правилу
$$F(v_1 \otimes v_k) := \varphi(v_1, \dots, v_k).$$

Определение 6.19. Элементы вида $v_1 \otimes \dots \otimes v_k \in V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ называются *разложимыми*.

Замечание 6.20. Сумма разложимых элементов, вообще говоря, НЕ БУДЕТ разложимым элементом. Множество разложимых элементов НЕ образует векторное подпространство в $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$, хотя и порождает его линейно.

E-mail address: `esmirnov@hse.ru`