

Задачи для семинара 5

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций.

Пусть V — n -мерное векторное пространство над полем \mathbb{K} нулевой характеристики.

5.1. Найдите размерности пространств:

- а) всех билинейных функций $V \times V \rightarrow \mathbb{K}$;
- б) всех симметрических билинейных функций;
- в) всех кососимметрических билинейных функций.

5.2. а) Найдите размерность пространства всех трилинейных функций $V \times V \times V \rightarrow \mathbb{K}$.

б) Дайте определения симметрической и кососимметрической трилинейной функции и найдите размерности соответствующих пространств.

в) Верно ли, что всякая трилинейная функция есть сумма симметрической и кососимметрической?

5.3. Найдите размерность пространства трилинейных функций, удовлетворяющих условию:

- а) $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, w, u)$;
- б) $\varphi(u, u, v) = \varphi(u, v, v) = 0$.

5.4. Постройте канонические (т.е. не зависящие от выбора базиса) изоморфизмы пространств:

- а) $\text{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$ (в частности, отсюда следует, что $\text{End}(V) \cong V^* \otimes V$);
- б) $\text{Hom}(\text{Hom}(U, V), W) \cong \text{Hom}(V, U \otimes W)$.

5.5. а) Пусть $v_1, \dots, v_n \in V$ и $\xi_1, \dots, \xi_n \in V^*$ — двойственные базисы. В какой эндоморфизм пространства V переходит при изоморфизме из п. а) предыдущей задачи тензор Казимира $\xi_1 \otimes v_1 + \dots + \xi_n \otimes v_n$?

б) Рассмотрим отображение свертки $V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{K}$, $\alpha \otimes w \mapsto \alpha(w)$. Ему соответствует некоторое отображение $\text{End}(V) \rightarrow \mathbb{K}$. Что это за отображение?