Дискретная математика
Семинар 13

ВШЭ, факультет математики
первый курс, четвёртый модуль

1. Докажите, что эпф по параметру m сумм $S_m(n)$ равна $\frac{e^{nz}-1}{e^z-1}$. Выведите из этого утверждние задачи 7 предыдущего семинара.

2. Рассмотрим выражение $S_m(n)$ как многочлен от n. Для $n \geq 0$ выразите значение многочлена $S_m(-n)$ через значения в положительных точках. Докажите, что $S_m(n)$ делится на $n(n-1)$ при всех m, а при чётных m ещё и на $(n - \frac{1}{2})$.

Определим многочлены Бернулли $B_n(x)$ по формуле

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

3. Докажите формулу для эпф многочленов Бернулли

$$\sum_{m \geq 0} B_m(x) \frac{z^m}{m!} = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1}.$$

4. Докажите, что $S_{m-1}(n) = \frac{1}{m}(B_m(n) - B_m(0))$.

5. Докажите, что

$$B_n(x) = \frac{\frac{d}{dx}}{e^{\frac{d}{dx}} - 1} x^n.$$

6. Докажите, что многочлены Бернулли однозначно определены условием

$$\int_x^{x+1} B_n(y) dy = x^n.$$

7. Докажите, что $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.