Листок 12. Мера Жордана и кратные интегралы

Анализ, 1 курс, **19.05.2014**

Срок сдачи листка 4 июня. Листок состоит из двух страниц.

Максимальная оценка за листок ставится, если по нему набрано не менее **десяти** баллов. Сдача решения каждой задачи с ноликом или пункта задачи без нолика дает один балл, задачи со звездочкой — два балла. Кроме того, за каждую несданную задачу с ноликом снимется один балл. Задача с ноликом сдается только целиком, в остальных задачах каждый пункт оценивается отдельно.

12◇1^0 Постройте примеры:
(а) множества меры 0 по Лебегу, замыкание которого совпадает со всем пространством;
(б) открытого всюду плотного множества на квадрате $[0,1]\times[0,1]$, неизмеримого по Жордану;
(в) функции $f: I=[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, почти всюду равную нулю и не интегрируемую на I.

12◇2^0 (а) Существует ли множество меры 0 по Лебегу, измеримое по Жордану, мера которого по Жордану отлична от нуля?
(б) Покажите, что измеримое по Жордану множество без внутренних точек имеет меру 0 по Жордану.

12◇3 Укажите вещественнозначную функцию, определенную на $[0,1]$, график которой неизмерим по Жордану на плоскости.

12◇4 Докажите, что если проекция ΠV ограниченного множества $V\in\mathbb{R}^n$ на $(n-1)$-мерную гиперплоскость $\Pi\mathbb{R}^n$ имеет $(n-1)$-мерную меру нуль, то множество V имеет n-мерную меру нуль.

12◇5 Покажите, что если $f\in\mathcal{R}(I)$ и f почти всюду равна нулю, то $\int_I f(x)dx=0$.

12◇6 Докажите, что определенная на промежутке $I\subset\mathbb{R}^n$ функция $f: I\to\mathbb{R}$ интегрируема, если и только если $\forall\varepsilon>0$ существует такое разбиение P промежутка I, что разность верхней и нижней сумм Дарбу удовлетворяет неравенству $S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$.

12◇7 Верно ли, что если f интегрируема на ограниченном множестве $G\in\mathbb{R}^n$, то она интегрируема на любом подмножестве $D\in G$?

12◇8 (а) Пусть E — множество меры 0 по Лебегу, а f — непрерывная и ограниченная на E функция. Всегда ли f интегрируема на E? Чему равен интеграл, если он существует?
(б) Пусть E — множество меры 0 по Жордану, а f — непрерывная и ограниченная на E функция. Всегда ли f интегрируема на E?

12◇9 Доказать формулу Дирихле: если $f\in C([a,b]\times[a,b])$, то

$$\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)\,dxdy.$$

12◇10 Пусть $G=\{0\le x,y\le 1\}$ — единичный квадрат, $f: G\to\mathbb{R}$ — непрерывная, неотрицательная, ограниченная интегрируемая функция на G. Положим $M=\sup_G f$. Доказать, что

$$\lim_{n\to 0}\Big(\int\limits_G f^n(x)\,dx\Big)^{1/n}=M.$$

12◇11 Пусть $G\in\mathbb{R}^n$ — измеримое по Жордану множество, $x_0\in G$ — внутренняя точка, $f: G\to\mathbb{R}$ — интегрируема на G и непрерывна в точке x_0, Доказать, что

$$\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{\mu(U(x_0,\delta))}\int\limits_{U(x_0,\delta)} f(x)\,dx=f(x_0),$$

где $U(x_0,\delta)$ — это δ-окрестность точки x_0.

12◇12 Приведите пример функции, определенной на неизмеримом по Жордану множестве G, положительной и интегрируемой на этом множестве.

12◇13 Для функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ определим

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Докажите неравенство Гёльдера

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

для всех положительных $p, q \geq 1$, таких что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и всех функций f и g, для которых $\|f\|_p$ и $\|g\|_q$ имеют смысл.

12◇14 Докажите неравенство Минковского

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Здесь использованы обозначения предыдущей задачи.

12◇15 Докажите, что для выпуклой функции $\varphi(x)$ и интегрируемой функции $f(x)$ выполняется неравенство Йенсена

$$\varphi\left(\int_a^b f(x) \, dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi((b-a)f(x)) \, dx.$$