Задачи для семинара 6

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций.

Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики.

6.1. Докажите, что всякий элемент $V \otimes V$ можно представить в виде суммы не более n разложимых тензоров.

6.2. Пусть в V выбран базис $e_1, \ldots, e_n$. Укажите базисы в подпространствах симметрических и кососимметрических тензоров в:

а) $V \otimes V$; **б)** $V^{\otimes k}$.

6.3. Докажите, что линейная оболочка тензоров вида $v \otimes v \otimes \cdots \otimes v \in V^{\otimes k}$ совпадает с пространством всех симметрических тензоров.

6.4. Найдите след оператора $\bigwedge^2 A$ по его матрице A:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **б)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6.5. а) Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис пространства V, $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}$ — базис пространства $\bigwedge^k V$. Найдите матрицу оператора $\bigwedge^k V$ в указанном базисе.

б) Найдите $\operatorname{tr} \bigwedge^k A$. Что происходит при $k = n$?

в) Докажите формулу Бине–Коши:

$$|(AB)_I^J| = \sum_K |A_I^K||B_K^J|,$$

где A_I^J есть подматрица матрицы A с номерами строк $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, \ldots, j_k$, где $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$.

6.6. Найдите центр алгебры $\bigwedge^\bullet V$.