

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ — 1

(осенний семестр 2014–2015 уч. года, для 3–4 курса)

Лектор — доц. А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ — наука о бесконечномерных векторных пространствах, снабженных нормой (или, более общим образом, топологией), об операторах между ними и о представлениях алгебраических структур в таких пространствах. Он включает в себя большое количество разнообразных областей, как классических, так и появившихся сравнительно недавно. К классическим направлениям относятся, например, спектральная теория линейных операторов, общая теория банаховых и топологических векторных пространств, теория обобщенных функций, теория операторных алгебр, эргодическая теория. Из новых и бурно развивающихся областей функционального анализа выделим некоммутативную геометрию в духе А. Конна, теорию операторных пространств (называемую иногда «квантовым функциональным анализом») и теорию локально компактных квантовых групп. Функциональный анализ имеет многочисленные приложения в дифференциальных уравнениях, гармоническом анализе, теории представлений, геометрии, топологии, вариационном исчислении, оптимизации, квантовой физике и других областях.

Краткая программа курса

- 1. НОРМИРОВАННЫЕ И БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА.** Нормированные пространства. Ограниченные линейные операторы. Основные примеры. Конструкции нормированных пространств. Банаховы пространства. Полнота классических пространств. Конструкции, сохраняющие полноту. Пополнение.
- 2. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА.** Проекции и ортогональные дополнения. Ортонормированные системы. Неравенство Бесселя. Ортонормированные базисы. Равенство Парсеваля. Теорема Рисса–Фишера. Классификация гильбертовых пространств.
- 3. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ.** Теорема Хана–Банаха. Отделение выпуклых множеств. Сопряженное пространство и сопряженный оператор. Описание пространств, сопряженных к классическим банаховым пространствам. Каноническое вложение во второе сопряженное, рефлексивность.
- 4. ТЕОРЕМЫ БАНАХА И ДВОЙСТВЕННОСТЬ.** Теоремы Банаха об открытом отображении, об обратном операторе и о замкнутом графике. Теорема Банаха–Штейнгауза. Дополняемые подпространства. Аннуляторы, преданнуляторы. Описание пространств, сопряженных к подпространствам и к факторпространствам. Связь свойств оператора со свойствами его сопряженного.
- 5. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ.** Спектр элемента алгебры. Банаховы алгебры. Непустота и компактность спектра. Теорема Гельфанда–Мазура. Спектральный радиус. Точечный, непрерывный и остаточный спектры линейного оператора. Спектры и двойственность. Вычисление спектров классических операторов.