Уравнения в частных производных
(основные темы курса, рассчитанного примерно на 20 лекций)
лектор д.ф.-м.н. В.В.Чепыжов

1. Физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных. Линейные уравнение с частными производными второго порядка и их классификация. Характеристики уравнений с частными производными.
2. Постановка основных краевых задач. Корректные краевые задачи. Теорема Коши-Ковалевской о локальной разрешимости задачи Коши для уравнений типа Ковалевской.
3. Задача Коши для уравнения упругих колебаний струны, формула Даламбера. Гладкость решения в зависимости от гладкости начальных данных. Области зависимости решений от начальных данных, конечная скорость распространения колебаний. Метод Фурье решения волновых уравнений. Обобщенные решения уравнения колебаний струны.
4. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма-Лиувилля. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля и ее свойства.
5. Уравнение теплопроводности. Смешанная краевая задача и ее решение по методу Фурье. Принцип максимума. Теорема единственности и непрерывной зависимости решения первой краевой задачи от начальных и граничных условий. Функция Грина уравнения теплопроводности и ее свойства.
6. Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности во всем пространстве. Теорема единственности в классе ограниченных функций. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с помощью преобразования Фурье, формула Пуассона. Уравнения и системы, корректные по Петровскому.
7. Задача Коши для волнового уравнения. Энергетическое неравенство. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbf{R}^3$. Распространение волн. Передний и задний фронт волны. Метод спуска. Формула Пуассона.
8. Эллиптические уравнения. Формулы Грина. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Представление решения задачи Дирихле при помощи функции Грина в шаре и в круге. Обоснование формулы Пуассона.
9. Гармонические функции и их свойства. Принцип максимума для гармонических функций. Теорема об устранимой особенности для гармонических функций. Теорема Лиувилля.
10. Обобщенные производные в смысле Соболева. Пространства Соболева $\mathbf{H}^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1{}_0(\Omega)$. Неравенство Фридрихса. Решение обобщенной задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Вариационный метод решения этой задачи.