Функциональный анализ

Вопросы к коллоквиуму за 3 и 4 модули

1. Лемма Рисса об ε-перпендикуляре. Некомпактность сферы в бесконечномерном нормированном пространстве. Теорема Арцела–Асколи.

2. Компактные операторы. Простейшие примеры компактных и некомпактных операторов. Свойства множества $\mathscr{K}(X,Y)$ компактных операторов. Критерий компактности диагонального оператора. Компактность сопряженного оператора. Аппроксимируемость компактных операторов в гильбертовом пространстве конечномерными.

3. Фредгольмовы операторы. Простейшие примеры. Замкнутость образа фредгольмова оператора. Фредгольмов индекс. Фредгольмовость и индекс сопряженного оператора. Аддитивность индекса.

4. Подъем и спуск линейного оператора; их свойства. Теорема Рисса–Шаудера об операторах "$\mathbf{1}$ + компактный". Альтернатива Фредгольма. Применение к интегральным уравнениям.

5. Свойства спектра компактного оператора.

6. Критерий фредгольмовости Никольского–Аткинсона. Алгебра Калкина. Существенный спектр, его компактность и непустота.

7. Открытость множества фредгольмовых операторов и локальная постоянность индекса. Сохранение фредгольмовости и индекса при компактных возмущениях. Теорема Никольского о фредгольмовых операторах индекса 0.

8. Гильбертово сопряженный оператор. Свойства операции гильбертова сопряжения. C^*-тождество.

9. Ортогональные проекторы в гильбертовом пространстве и их алгебраическое описание. Алгебраическое описание изометрий и коизометрий в гильбертовом пространстве. Унитарные и самосопряженные операторы. Критерий самосопряженности в терминах квадратичных форм.

10. Спектр унитарного оператора. Спектр самосопряженного оператора. Спектральный радиус самосопряженного оператора. Связь между инвариантностью подпространства и его ортогонального дополнения.

11. Теорема Гильберта–Шмидта о компактных самосопряженных операторах.

12. Теорема Шмидта о строении компактных операторов между гильбертовыми пространствами. s-числа компактного оператора.

13. Задача Штурма–Лиувилля. Оператор Штурма–Лиувилля. Функция Грина и интегральный оператор, обратный к оператору Штурма–Лиувилля. Теорема о собственных значениях и собственных функциях оператора Штурма-Лиувилля.

14. Полинормированные пространства. Топология, порожденная семейством полунорм. Критерий ее хаусдорфовости. Примеры.

15. Выпуклые, закругленные и абсолютно выпуклые оболочки множеств в векторном пространстве. Функционал Минковского и его свойства. Локально выпуклые пространства. Связь локально выпуклых и полинормированных пространств.

16. Критерий непрерывности полунормы на локально выпуклом пространстве. Критерий непрерывности линейного оператора в терминах полунорм. Критерий мажорирования одного семейства полунорм другим.

17. Ограниченные подмножества локально выпуклого пространства. Критерий нормируемости. Ограниченные множества и непрерывные линейные операторы.

18. Наличие достаточного количества непрерывных линейных функционалов на хаусдорфовом локально выпуклом пространстве. Теоремы об отделении выпуклых множеств.

19. Дуальные пары и слабые топологии. Линейные функционалы, непрерывные в слабой топологии. Критерий рефлексивности банахова пространства в терминах слабых топологий.

20. Сопряженные операторы для дуальных пар. Критерий существования сопряженного оператора. Эквивалентность непрерывности и слабой непрерывности оператора между банаховыми пространствами.

21. Поляры. Теорема о биполяре и ее следствия. Аннулятор ядра линейного оператора. Теорема Голдстайна.

22. Равностепенная непрерывность. Теорема Банаха–Алаоглу.

23. Компактные операторы и слабая сходимость.

24. Проективные и индуктивные локально выпуклые топологии. Примеры. Каноническая топология на пространстве $\mathscr{D}(U) = C_c^\infty(U)$. Описание сходящихся последовательностей в $\mathscr{D}(U)$.

25. Обобщенные функции (распределения): топологическое и секвенциальное определения. Регулярные обобщенные функции, дельта-функция.

26. Умножение обобщенной функции на гладкую. Дифференцирование обобщенных функций. «Замена переменной» в обобщенных функциях.

27. Склеивание обобщенных функций (обобщенные функции образуют пучок). Носитель обобщенной функции.

28. Теорема Стоуна–Вейерштрасса.

29. Общая схема построения пространств обобщенных функций. Меры Радона как обобщенные функции. Пространство Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и обобщенные функции умеренного роста. Обобщенные функции как функционалы на $\mathscr{E}(U) = C^\infty(U)$.