Дискретная математика
Семинар 17

ВШЭ, факультет математики
первый курс, четвёртый модуль

1. Говорят, что случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром μ, если $P(X = k) = e^{-\mu}\mu^k/k!$ для всех $k \geq 0$. Чему равны математическое ожидание и дисперсия X?

2. Допустим, что случайная величина X_1 имеет распределение Пуассона с параметром μ_1, а случайная величина X_2 независима от X_1 и имеет распределение Пуассона с параметром μ_2. Какова вероятность того, что $X_1 + X_2 = n$?

3. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины $2X_1 + 3X_2$ (X_1, X_2 из предыдущей задачи)?

4. Случайная величина X имеет распределение Бернулли, если она принимает всего два значения 1 и 0 с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно. Вычислите математическое ожидание и дисперсию X.

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение Бернулли с параметром p. Пусть $Y = X_1 + \cdots + X_n$. Найдите $P(Y = k)$ (это биномиальное распределение). Вычислите математическое ожидание и дисперсию.

Пусть вероятностное пространство $\Omega = S_n$, $P(\sigma) = 1/n!$. Определим случайную величину F_n, значение которой на перестановке σ равно числу неподвижных точек σ.

6. Вычислите математическое ожидание и дисперсию F_n.

7. Выразите функцию $f_n(k) = P(F_n = k)$ через числа беспорядков.

Пусть X – случайная величина на вероятностном пространстве Ω. Определим с.в. X_i на вероятностном пространстве Ω^n (с естественной функцией вероятности – какой?) по формуле $X_i(\omega_1, \ldots, \omega_n) = X(\omega_i)$.

8. Рассмотрим случайные величины $\widehat{EX} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ и

$$\widehat{DX} = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n-1} - \frac{(X_1 + \cdots + X_n)^2}{n(n-1)}.$$

Докажите, что $E(\widehat{EX}) = EX$, $E(\widehat{DX}) = DX$.