Задачи для семинара 7

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций.

Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики.

7.1. Докажите, что k-мерное пространство $U \subset V$ инвариантно относительно линейного оператора $A\colon V \to V$ тогда и только тогда, когда прямая $\Lambda^k U \subset \Lambda^k V$ инвариантна относительно оператора $\Lambda^k A$.

7.2. Докажите, что если $\operatorname{tr} \Lambda^k A = 0$ при всех $k \le n$, то оператор A нильпотентен.

7.3. Докажите, что всякий бивектор $\xi \in \Lambda^2 V$ в некотором базисе записывается в виде

$$\xi = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots + e_{2k-1} \wedge e_{2k}, \qquad 2k \le n.$$

7.4. Докажите, что бивектор $\xi \in \Lambda^2 V$ разложим тогда и только тогда, когда $\xi \wedge \xi = 0$.

7.5. а) Выведите из предыдущей задачи, что бивектор $\xi \in \Lambda^2 \mathbb{K}^4$ разложим тогда и только тогда, когда его координаты удовлетворяют уравнению

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

б) Сформулируйте и докажите аналог этого утверждения для $\xi \in \Lambda^2 \mathbb{K}^n$.

7.6. Существует ли матрица 2×4, у которой миноры порядка 2 равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6? (в каком-то порядке).