8. Восьмая лекция (последняя), 4 июня 2014 г.

8.1. **Симметрические тензоры. Симметризация.** В этом разделе мы считаем, что $\operatorname{char} K = 0$.

Рассмотрим k-тую тензорную степень $V^{\otimes k}$ пространства V. На этом пространстве действует группа S_k перестановками сомножителей:

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}.$$

Тензор $\omega \in V^{\otimes k}$ называется *симметрическим*, если $\sigma(\omega) = \omega$ для любой перестановки $\sigma \in S_k$. Симметрические тензоры образуют подпространство, которое мы обозначим через $\operatorname{Sym}^k V \subset V^{\otimes k}$.

Рассмотрим оператор *симметризации* $\operatorname{Sym}\colon V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}$:

$$\operatorname{Sym}(\omega) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma(\omega).$$

Ясно, что $\operatorname{Im}\operatorname{Sym} \subset \operatorname{Sym}^k V$, а также что оператор Sym оставляет симметрические тензоры неподвижными. Поэтому Sym является *проектором* на подпространство $\operatorname{Sym}^k V$.

Пример 8.1. Пусть $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Тогда $\operatorname{Sym}^2 V = \langle e_i \otimes e_i, e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i \rangle$, а $\operatorname{Ker}\operatorname{Sym} = \langle e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i \rangle$.

Предложение 8.2. *Имеется изоморфизм векторных пространств*

$$\mu\colon S^k V \to \operatorname{Sym}^k V, \qquad \mu(v_1 \cdot \dots \cdot v_k) = \operatorname{Sym}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k).$$

Доказательство. Правая часть симметрична и полилинейна относительно $v_1, \dots, v_k$. Значит, в силу универсального свойства существует линейное отображение $\mu\colon S^k V \to \operatorname{Sym}^k V$. Можно проверить (проделайте это), что при этом отображении базисные векторы вида $e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k}$ переходят в $\operatorname{Sym}(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k})$. Такие векторы составляют базис пространства $\operatorname{Sym}^k V$, значит, μ — изоморфизм. $\square$

Замечание 8.3. Итак, в каждой из тензорных степеней есть подпространство, изоморфное k-той симметрической степени: $\operatorname{Sym}^k V \subset V^{\otimes k}$. Однако прямая сумма $\bigoplus \operatorname{Sym}^k V \subset TV$ всех этих пространств *не является* подалгеброй относительно обычного тензорного произведения, т.к. не замкнута относительно этой операции. Чтобы ввести на $\bigoplus \operatorname{Sym}^k V$ структуру алгебры, следует определить умножение по правилу

$$\omega \cdot \tau = \operatorname{Sym}(\omega \otimes \tau).$$

8.2. **Кососимметрические тензоры. Альтернирование.** Итак, конструкция симметризации позволяет рассматривать симметрические степени пространства V как подпространства в соответствующих тензорных степенях того же пространства. Разумеется, то же самое можно проделать и с внешними степенями.

Рассмотрим k-тую тензорную степень $V^{\otimes k}$ пространства V. Напомним, что группа S_k действует на ней перестановками сомножителей:

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}.$$

Тензор $\omega \in V^{\otimes k}$ называется *кососимметрическим*, если $\sigma(\omega) = (-1)^\sigma \omega$ для любой перестановки $\sigma \in S_k$. Кососимметрические тензоры образуют подпространство, которое мы обозначим через $\operatorname{Alt}^k V \subset V^{\otimes k}$.

Рассмотрим оператор *альтернирования* $\operatorname{Alt}\colon V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}$:

$$\operatorname{Alt}(\omega) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma \sigma(\omega).$$

Как и в симметрическом случае, Alt будет проектором на подпространство $\operatorname{Alt}^k V$. Это подпространство оказывается изоморфным k-той внешней степени пространства V:

Предложение 8.4. *Имеется изоморфизм векторных пространств*

$$\mu\colon \Lambda^k V \to \operatorname{Alt}^k V, \qquad \mu(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \operatorname{Alt}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k).$$

Доказательство аналогично симметрическому случаю.

Замечание 8.5. Как и в симметрическом случае, прямая сумма $\bigoplus \operatorname{Alt}^k V \subset TV$ всех пространств кососимметрических тензоров *не является* подалгеброй относительно обычного тензорного произведения, т.к. не замкнута относительно этой операции. Чтобы ввести на $\bigoplus \operatorname{Alt}^k V$ структуру алгебры, следует определить умножение по правилу

$$\omega \wedge \tau = \operatorname{Alt}(\omega \otimes \tau).$$

Упражнение 8.6. Докажите, что $\operatorname{Sym}(\operatorname{Alt}) = \operatorname{Alt}(\operatorname{Sym}) = 0$.

Упражнение 8.7. Докажите, что $V \otimes V = \operatorname{Sym}^2 V \oplus \operatorname{Alt}^2 V$, а при $k > 2$ и при $\dim V > 1$ такого равенства нет: $V^{\otimes k} \neq \operatorname{Sym}^k V \oplus \operatorname{Alt}^k V$.

8.3. **Разложимые тензоры и подпространства.** Внешние степени оказываются полезными для работы с подпространствами векторного пространства. Имеет место следующий факт.

Теорема 8.8. (1) *Векторы $v_1, \ldots, v_k \in V$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \neq 0$.*

(2) *Пусть $v_1, \ldots, v_k$ и $u_1, \ldots, u_k$ — два линейно независимых набора векторов. Тогда их линейные оболочки $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ и $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ совпадают тогда и только тогда, когда поливекторы $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ и $u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$ пропорциональны.*

Доказательство. (1) Докажем, что из линейной зависимости следует обращение поливектора в нуль. Пусть $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i$. Тогда $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k-1} \wedge (\sum \lambda_i v_i) = \sum \lambda_i v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k-1} \wedge v_i = 0$.

Обратно, если $v_1, \dots, v_k$ линейно независимы, их можно дополнить до базиса пространства V. Ему будет соответствовать базис пространства $\Lambda^k V$, и поливектор $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ будет в числе базисных — следовательно, он будет отличен от нуля.

(2) Пускай $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$. Тогда u_i линейно выражаются через v_j, следовательно,

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_k = \sum \lambda_{i_1 \dots i_k} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}, \qquad 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq k$$

Но $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}$ равен либо $\pm v_1 \wedge \dots \wedge v_k$, если все индексы $i_1, \dots, i_k$ различны, либо нулю в противном случае. Поэтому $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \lambda u_1 \wedge \dots \wedge u_k$.

Если же $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \neq \langle u_1, \dots, u_k \rangle$, то в V можно выбрать такой базис $e_1, \dots, e_n$, что $\langle e_1, \dots, e_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ и $\langle e_{d+1}, \dots, e_{d+k} \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ при некотором $d > 0$. Векторы $e_1 \wedge \dots \wedge e_k$ и $e_{d+1} \wedge \dots \wedge e_{d+k}$ будут двумя различными (а значит, не пропорциональными друг другу) базисными векторами из $\Lambda^k V$. □

8.4. **Грассманиан. Вложение Плюккера.**

Определение 8.9. *Грассманианом*, или *многообразием Грассмана* $\mathrm{Gr}(k, V)$ называется множество всех k-мерных подпространств в пространстве V.

Упражнение 8.10 (по курсу топологии)**.** Введите на $\mathrm{Gr}(k, V)$ структуру гладкого (или топологического) многообразия и найдите его размерность. Должно получиться $k(n-k)$, где $n = \dim V$.

Предложение 8.11. *Имеет место* вложение Плюккера

$$\mathrm{Gr}(k, V) \hookrightarrow \mathbb{P}\Lambda^k V, \qquad \langle u_1, \dots, u_k \rangle \mapsto [u_1 \wedge \dots \wedge u_k].$$

Его образ задается однородными алгебраическими уравнениями в $\mathbb{P}\Lambda^k V$.

Доказательство. Теорема 8.8 показывает, что это отображение действительно корректно определено (при замене базиса в подпространстве соответствующий поливектор умножается на скаляр) и является вложением (это в точности часть (2) теоремы).

Докажем, что его образ задается алгебраическими уравнениями. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 8.12. *Пусть* $\omega \in \Lambda^k V$ *— произвольный поливектор. Рассмотрим отображение* $\Phi_\omega \colon V \to \Lambda^{k+1} V$, $v \mapsto v \wedge \omega$. *Тогда* $\dim \operatorname{Ker} \Phi_\omega \leq k$, *причем равенство достигается тогда и только тогда, когда* ω *разложим.*

Доказательство. Выберем в V базис $e_1, \dots, e_n$ так, чтобы первые r его векторов образовывали базис в $\operatorname{Ker} \Phi_\omega$. Разложим ω по базису в $\Lambda^k V$:

$$\omega = \sum a_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = \sum a_I e_I.$$

(I — это мультииндекс, то есть множество из k чисел от 1 до n).

Поскольку при $i \leq r$ вектор e_i лежит в ядре Φ_ω, то $\omega \wedge e_i = 0$, поэтому i лежит в каждом из множеств I. Значит, $\{1, \ldots, r\} \subset \bigcap\limits_{a_I \neq 0} I$. Поэтому $r \leq k$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда в ω только одно слагаемое, т.е. ω разложим. □

Итак, условие разложимости поливектора ω равносильно тому, что $\dim \operatorname{Ker} \Phi_\omega \geq k$, или, что то же самое, $\operatorname{rk} \Phi_\omega \geq n - k$. Это условие задается обращением в нуль всех миноров порядка $n - k + 1$ матрицы отображения Φ_ω, а это набор однородных уравнений на коэффициенты ω. Поэтому $\mathrm{Gr}(k, V) \subset \mathbb{P}\Lambda^k V$ задается однородными алгебраическими уравнениями, или, что то же самое, является проективным алгебраическим многообразием. □

Эти уравнения имеют достаточно большую степень. Оказывается, впрочем, что для задания грассманиана можно обойтись и квадратичными уравнениями, так называемыми *соотношениями Плюккера.* Мы выведем эти уравнения лишь в специальном случае, когда $k = 2$.

8.5. **Критерий разложимости бивектора. Соотношения Плюккера для $\mathrm{Gr}(2, V)$.** Начнем со следующей леммы, которая представляет и самостоятельный интерес[2].

Лемма 8.13. *Бивектор $\omega \in \Lambda^2 V$ является разложимым тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \omega = 0$.*

Доказательство. Часть “только тогда” очевидна. Докажем часть “тогда”. Будем вести доказательство по индукции по $n = \dim V$.

База: $\dim V = 2$, и все бивекторы пропорциональны $e_1 \wedge e_2$, то есть являются разложимыми.

Переход. Выберем в V базис $e_1, \ldots, e_n$. Пусть $\tilde{V} = \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle$. Представим ω в виде $\omega = \omega' + v \wedge e_n$, где $\omega' \in \Lambda^2 \tilde{V}$, $v \in \tilde{V}$. Тогда

$$0 = \omega \wedge \omega = (\omega' + v \wedge e_n) \wedge (\omega' + v \wedge e_n) = \omega' \wedge \omega' + 2\omega' \wedge v \wedge e_n.$$

Поскольку первое слагаемое не зависит от e_n, а второе зависит, то оба слагаемых равны нулю:

$$\omega' \wedge \omega' = 0, \qquad \omega' \wedge v = 0.$$

По предположению индукции, ω' разложим. Пусть $\omega' = x \wedge y$. Поскольку $\omega' \wedge v = 0$, то v является линейной комбинацией x и y. Пусть $v = \lambda x + \mu y$. Тогда легко видеть, что

$$\omega = (x - \mu e_n) \wedge (y + \lambda e_n).$$

□

[2]На лекции этого не рассказывалось. В некоторых группах этот материал обсуждался на семинаре.

Пусть $\omega = \sum_{i<j} p_{ij} e_i \wedge e_j$. Запишем условие $\omega \wedge \omega = 0$ в координатах:

$$\omega \wedge \omega = (\sum_{i<j} p_{ij} e_i \wedge e_j) \wedge (\sum_{k<l} p_{kl} e_k \wedge e_l) =$$
$$= 2 \sum_{i<j<k<l} (p_{ij}p_{kl} - p_{ik}p_{jl} + p_{il}p_{jk}) e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_l.$$

Итак, условие $\omega \wedge \omega = 0$ равносильно тому, что

$$p_{ij}p_{kl} - p_{ik}p_{jl} + p_{il}p_{jk} = 0, \qquad 1 \leq i < j < k < l \leq n. \qquad (*)$$

Эти уравнения называются *соотношениями Плюккера*. Мы доказали следующее предложение.

Предложение 8.14. *Уравнения* $(*)$ *задают грассманиан* $\mathrm{Gr}(k, V)$ *в пространстве* $\mathbb{P}\Lambda^2 V$.

Особенно просто это выглядит, когда $\dim V = 4$: в этом случае имеется лишь одно уравнение.

Следствие 8.15. *Грассманиан* $\mathrm{Gr}(2,4) \subset \mathbb{P}\Lambda^2 V \cong \mathbb{P}^5$ *задается уравнением*

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Он является невырожденной квадратичной гиперповерхностью в $\mathbb{P}^5$.

Это соотношение напоминает *теорему Птолемея* из школьного курса планиметрии:

Теорема 8.16 (Птолемей, I век н.э.)**.** *Пусть* $ABCD$ *— вписанный четырехугольник. Тогда на длины его сторон и диагоналей имеется соотношение*

$$AB \cdot CD - AC \cdot BD + AD \cdot BC = 0.$$

E-mail address: esmirnov@hse.ru