7. Седьмая лекция, 28 мая 2014 г.

7.1. **Тензорное произведение операторов.** Пусть даны два пространства V и W, на каждом из которых задано по линейному оператору $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$ и $\mathcal{B} \in \operatorname{End}(W)$. Определим тогда линейный оператор $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ на пространстве $V \otimes W$ по правилу

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(v \otimes w) = \mathcal{A}v \otimes \mathcal{B}w.$$

Пусть оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1, \ldots, e_m$ записывается матрицей $A = (a_{ij})$, а оператор $\mathcal{B}$ в базисе $f_1, \ldots, f_n$ записывается матрицей B. Тогда несложно убедиться, что матрица оператора $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ в базисе $e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \ldots, e_1 \otimes f_n, e_2 \otimes f_1, \ldots, e_m \otimes f_n$ записывается в блочном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \ldots & a_{mm}B \end{pmatrix}$$

Из этой записи следует, что $\operatorname{tr}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \operatorname{tr} \mathcal{A} \cdot \operatorname{tr} \mathcal{B}$.

Упражнение 7.1. Выразите $\det(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ через $\det \mathcal{A}$ и $\det \mathcal{B}$.

7.2. **Тензорная алгебра.** Пусть V — векторное пространство. Рассмотрим его тензорные степени $V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V$ (всего k сомножителей). Положим $V^{\otimes 0} = K$ и $V^{\otimes 1} = V$. У нас имеются билинейные отображения $V^{\otimes k} \times V^{\otimes l} \to V^{\otimes (k+l)}$, заданные по правилу $(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 \otimes \omega_2$.

Рассмотрим прямую сумму всех тензорных степеней

$$TV = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}.$$

Описанные выше билинейные отображения задают на этом пространстве умножение. Иными словами, TV является ассоциативной (но некоммутативной) градуированной алгеброй. V вкладывается в TV как компонента степени 1. Обозначим это вложение через ι.

Если выбрать в V базис $e_1, \ldots, e_n$, то мономы вида $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$ будут базисом в $V^{\otimes k}$. Таким образом, все такие мономы (для всевозможных k) будут образовывать базис в TV как в векторном пространстве. Отметим, что переменные в этих мономах не коммутируют: $e_1 \otimes e_2 \neq e_2 \otimes e_1$.

Алгебра TV также может быть описана при помощи универсального свойства.

Предложение 7.2. *Пусть A — произвольная ассоциативная K-алгебра. Тогда для любого K-линейного отображения $f\colon V \to A$ имеется единственный гомоморфизм K-алгебр $\alpha\colon TV \to A$, для которого $\alpha \circ \iota = f$.*

Упражнение 7.3. Докажите это.

7.3. **Симметрическая степень пространства.**

Определение 7.4. Пусть V, U — векторные пространства над K. k-линейное отображение $\varphi\colon V\times\cdots\times V\to U$ называется *симметрическим*, если для любой перестановки $\sigma\in S_k$

$$\varphi(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})=\varphi(v_1,\ldots,v_k).$$

Определение 7.5. Векторное пространство S вместе с симметрическим k-линейным отображением

$$V\times\cdots\times V\to S,\qquad (v_1,\ldots,v_k)\mapsto v_1\cdot\cdots\cdot v_k$$

называется *k-той симметрической степенью пространства V*, если для некоторого базиса $e_1,\ldots,e_n$ пространства V элементы вида $e_{i_1}\cdot\cdots\cdot e_{i_k}$, где $1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n$, составляют базис пространства S.

Предложение 7.6. *Пространство S существует и не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. Доказательство существования — явная конструкция. Рассмотрим векторное пространство S с базисом $f_{i_1,\ldots,i_k}$, занумерованным неубывающими наборами индексов. Определим отображение на наборах базисных векторов так:

$$V\times\cdots\times V\to S,\qquad (e_{i_1},\ldots,e_{i_k})\mapsto f_{i_1,\ldots,i_k}.$$

Независимость от выбора базиса проверяется так. Пусть $e'_1,\ldots,e'_n$ — другой базис пространства V. Тогда векторы $e'_{j_1}\cdot\cdots\cdot e'_{j_k}$, где $j_1\le\cdots\le j_k$, составляют другой базис пространства S, элементы которого линейно выражаются через элементы первого базиса, и наоборот. $\square$

Упражнение 7.7. Сформулируйте и докажите утверждение о единственности S в духе предложения 6.7

Пространство S обозначается через S^kV. Из определения следует, что $\dim S^kV$ равна количеству неубывающих наборов k чисел от 1 до n, т.е. числу способов разложить k шариков по n ящикам, которое, в свою очередь, равняется $\binom{n+k-1}{k}$.

Симметрические степени тоже можно охарактеризовать при помощи универсального свойства.

Предложение 7.8. *Для любого* симметрического *k-линейного отображения $\varphi\colon V\times\cdots\times V\to U$ существует единственное* линейное *отображение $F\colon S^kV\to U$, для которого $\varphi(v_1,\ldots,v_k)=F(v_1\cdot\cdots\cdot v_k)$.*

Доказательство. Определим отображение F на базисных векторах по правилу $F(e_{i_1}\cdot\cdots\cdot e_{i_k})=\varphi(e_{i_1},\ldots,e_{i_k})$, где $i_1\le\cdots\le i_k$. В силу симметричности φ это отображение будет задано корректно (подумайте, что это значит). Далее F продолжается на все S^kV по линейности. $\square$

Как и в случае тензорного произведения, элементы из S^kV вида $v_1 \cdot \dots \cdot v_k$ называются *разложимыми*. Они линейно порождают все пространство S^kV, поэтому чтобы задать линейное отображение из S^kV куда-то еще, его достаточно задать на разложимых элементах (что мы обычно и будем делать).

7.4. **Симметрическая степень линейного оператора.** Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор на пространстве V. Зададим линейный оператор $S^k\mathcal{A}$ на пространстве S^kV по правилу

$$(S^k\mathcal{A})(v_1 \cdot \dots \cdot v_k) = (\mathcal{A}v_1) \cdot \dots \cdot (\mathcal{A}v_k).$$

Упражнение 7.9. Проверьте, что $\operatorname{tr} S^2\mathcal{A} = \frac{1}{2}((\operatorname{tr}\mathcal{A})^2 + \operatorname{tr}\mathcal{A}^2)$, и придумайте формулу для $\operatorname{tr} S^3\mathcal{A}$.

7.5. **Симметрическая алгебра.** По аналогии с отображениями тензорных степеней определим билинейные отображения

$$S^kV \times S^lV \to S^{k+l}V, \qquad (v_1 \dots v_k, v_{k+1} \dots v_{k+l}) \mapsto v_1 \dots v_{k+l}.$$

Рассмотрим прямую сумму всех симметрических степеней (как и в случае тензорных степеней, считаем, что $S^0V = K$, $S^1V = V$):

$$SV = \bigoplus_{k \geq 0} S^kV.$$

Она также является градуированной ассоциативной алгеброй, но, в отличие от тензорной алгебре, она уже будет коммутативной. Она называется *симметрической алгеброй* пространства V.

Предложение 7.10. *Пусть* $\dim V = n$. *Тогда симметрическая алгебра изоморфна алгебре многочленов от* n *переменных:* $SV \cong K[u_1, \dots, u_n]$.

Доказательство. Зададим изоморфизм на базисных векторах:

$$e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k} \mapsto u_{i_1} \cdot \dots \cdot u_{i_k}.$$

$\square$

Упражнение 7.11. Постройте *канонический* изоморфизм $SV \cong K[V^*]$.

7.6. **Внешние степени векторного пространства.** Дальнейшая часть лекции посвящена конструкции внешних степеней и внешней алгебры векторного пространства. Эта конструкция во многом схожа с конструкцией симметрических степеней, поэтому мы приведем часть утверждений без доказательства, рассчитывая на то, что читатель восстановит доказательства сам по аналогии с симметрическим случаем.

Определение 7.12. Пусть V, U — векторные пространства над K. k-линейное отображение $\varphi\colon V \times \dots \times V \to U$ называется *кососимметрическим*, если для любой перестановки $\sigma \in S_k$

$$\varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (-1)^\sigma \varphi(v_1, \dots, v_k),$$

где $(-1)^\sigma$ — это знак перестановки σ.

Замечание 7.13. Если среди аргументов кососимметрического отображения присутствуют два одинаковых вектора (или, более общо, набор линейно зависимых векторов), то значение отображения на этом наборе равно нулю (убедитесь в этом!).

Определение 7.14. Векторное пространство Λ вместе с кососимметрическим k-линейным отображением

$$V \times \dots \times V \to \Lambda, \qquad (v_1, \dots, v_k) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k$$

называется *k-той внешней степенью пространства* V, если для некоторого базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства V элементы вида $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, составляют базис пространства Λ.

Предложение 7.15. *Пространство Λ существует, не зависит от выбора базиса и определено однозначно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Доказательство этого предложения дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения о симметрических степенях. □

Пространство Λ обозначается через $\Lambda^k V$. Из определения следует, что $\dim \Lambda^k V$ равна количеству строго возрастающих наборов k чисел от 1 до n, т.е. числу способов выбрать k предметов из n возможных, т.е. $\binom{n}{k}$.

Обратите внимание, что при $k = n$ пространство $\Lambda^k V$ будет *одномерно*, а при $k > n$ оно и вовсе оказывается равным нулю! В этом существенная разница с симметрическим случаем.

Для внешних степеней тоже имеется универсальное свойство.

Предложение 7.16. *Для любого* кососимметрического *k-линейного отображения $\varphi\colon V \times \dots \times V \to U$ существует единственное* линейное *отображение $F\colon \Lambda^k V \to U$, для которого $\varphi(v_1, \dots, v_k) = F(v_1 \wedge \dots \wedge v_k)$.*

Доказательство аналогично симметрическому случаю.

Элементы из $\Lambda^k V$ (их еще иногда называют *кососимметрическими поливекторами*, или *k-векторами*) вида $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ называются *разложимыми*.

Пусть в V выбран базис $e_1, \ldots, e_n$. Пространство $\Lambda^k V$ можно воспринимать как пространство однородных форм степени k от переменных $e_1, \ldots, e_n$, которые *антикоммутируют*, т.е. удовлетворяют соотношениям $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ (и, в частности, $e_i \wedge e_i = 0$).

7.7. **Внешняя степень линейного оператора.** Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор на пространстве V. Зададим линейный оператор $\Lambda^k\mathcal{A}$ на пространстве $\Lambda^k V$ по правилу

$$(\Lambda^k\mathcal{A})(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = (\mathcal{A}v_1) \wedge \cdots \wedge (\mathcal{A}v_k).$$

Упражнение 7.17. Проверьте, что $\operatorname{tr} S^2\mathcal{A} = \frac{1}{2}((\operatorname{tr}\mathcal{A})^2 - \operatorname{tr}\mathcal{A}^2)$, и придумайте формулу для $\operatorname{tr}\Lambda^3\mathcal{A}$.

Дальнейшее отличается от симметрического случая. Пусть $k = n$. Пространство $\Lambda^n V$ одномерно, т.е. оператор $\Lambda^n\mathcal{A}\colon \Lambda^n V \to \Lambda^n V$ есть просто умножение на скаляр. Вычислим этот скаляр. Выберем в V базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором оператор $\mathcal{A}$ действует матрицей $A = (a_{ij})$. Возьмем в $\Lambda^n V$ единственный базисный вектор $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ и посмотрим, как на него действует $\Lambda^n\mathcal{A}$.

$$\begin{gathered}
\Lambda^n\mathcal{A}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = (\mathcal{A}e_1) \wedge \cdots \wedge (\mathcal{A}e_n) = \\
= \left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} e_{i_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} e_{i_n}\right) = \\
= \sum_{\{i_1,\ldots,i_n\}=\{1,\ldots,n\}} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} = \\
= \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n} e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(n)} = \\
= \left(\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}\right) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \\
= \det\mathcal{A} \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.
\end{gathered}$$

Мы доказали следующее

Предложение 7.18. *Пусть* $\dim V = n$, $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$. *Тогда оператор* $\Lambda^n\mathcal{A}$ *действует на одномерном пространстве* $\Lambda^n V$ *скаляром* $\det\mathcal{A}$.

Упражнение 7.19. Докажите аналогичным образом формулу для разложения определителя по столбцу.

Подсказка 7.20. Воспользуйтесь тем, что $\Lambda^n\mathcal{A}(e_1\wedge\cdots\wedge e_n) = \Lambda^{n-1}\mathcal{A}(e_1\wedge \cdots \wedge e_{n-1}) \wedge \mathcal{A}e_n$.

Упражнение 7.21. Докажите, что след оператора $\Lambda^k\mathcal{A}$ равен с точностью до знака коэффициенту при λ^{n-k} характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$.

7.8. **Грассманова алгебра.** Рассмотрим билинейные отображения

$$\wedge\colon \Lambda^k V \times \Lambda^l V \to \Lambda^{k+l} V, \qquad (v_1 \wedge \dots \wedge v_k, v_{k+1} \wedge \dots \wedge v_{k+l}) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+l}.$$

Рассмотрим прямую сумму всех внешних степеней (как и ранее, считаем, что $\Lambda^0 V = K$, $\Lambda^1 V = V$):

$$\Lambda V = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k V.$$

Она также является градуированной ассоциативной алгеброй, произведение в которой мы обозначим знаком $\wedge$. Она называется *грассмановой*, или *внешней алгеброй* пространства V.

В отличие от симметрического случая, внешняя алгебра будет конечномерна: ее размерность будет равна $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ — что неудивительно, поскольку базис в ней образуют всевозможные векторы вида $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$, где $\{i_1, \dots, i_k\}$ может быть любым подмножеством множества $\{1, \dots, n\}$ (в том числе пустым).

Внешняя алгебра не будет коммутативной, зато будет *суперкоммутативной*: для любых двух однородных элементов ω_1 и ω_2 степеней k и l соответственно, имеет место равенство

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{kl} \omega_2 \wedge \omega_1.$$

(докажите это сами).