Уравнения в частных производных

Вопросы к экзамену за 4 модуль для 3 курса

1. Доказать теорему о существовании классического решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье для гладкой финитной начальной функции. Построить функцию Грина первой краевой задачи уравнения теплопроводности и установить ее простейшие свойства. Доказать принцип максимума для классического решения уравнения теплопроводности на конечном отрезке. Доказать теорему о единственности и непрерывной зависимости от начальных данных решения первой краевой задачи уравнения теплопроводности на отрезке. [2, § 10,11], [3, Лекция 13], [4, § 6.8].

2. Доказать свойства функции Грина первой краевой задачи уравнения теплопроводности: неотрицательность и оценка сверху интеграла по отрезку $[0, l]$. Дать физическую интерпретацию функции Грина уравнения теплопроводности. Доказать теорему о сходимости классических решений первой краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности к обобщенному решению этой задачи. Доказать теорему о существовании и единственности обобщенного решения первой краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности для непрерывной начальной функции. [2, § 11], [3, Лекция 14].

3. Доказать теорему о существовании классического решения для неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми краевыми условиями методом Фурье для гладкой финитной правой части $f(x, t)$. Выразить это решение через функцию Грина. Доказать теорему о существовании обобщенного решения для неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми краевыми условиями и с непрерывной правой частью $f(x, t)$ с помощью функции Грина. [2, § 12], [3, Лекция 14].

4. Доказать теорему единственности и непрерывной зависимости классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в полосе $D = \{(x, t) : \ x \in \mathbb{R},\ 0 < t \leq T\}$ в классе ограниченных функций. Свойства преобразования Фурье в пространстве Шварца: преобразование операторов дифференцирования и умножения на полиномы. Доказать теорему о том, что преобразование Фурье отображает пространство Шварца в себя. [2, § 13,14].

5. Применить преобразование Фурье при выводе формулы Пуассона для решений уравнения теплопроводности из пространства Шварца. Построить функцию Грина для уравнения теплопроводности на всей оси и установить ее основные свойства. Доказать теорему существования ограниченного решения задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности для ограниченной и непрерывной начальной функции, используя формулу Пуассона. [2, § 15], [3, Лекция 15], [4, § 6.4].

6. Привести формулу Пуассона в n-мерном случае. Доказать, что эта формула задает решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$. Построить с помощью формулы Пуассона решение первой и второй краевой задачи одномерного уравнения теплопроводности на полупрямой. [2, § 15], [3, Лекция 16], [4, § 6.5].

7. Дать определение линейного уравнения с частными производными, корректного по Петровскому. Привести примеры корректных и некорректных уравнений по Петровскому. Вывести формулу для решения одномерного уравнения Шредингера на всей оси. [2, § 4.2].

8. Привести формулу Кирхгофа для решения однородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$ с начальными данными $\varphi = 0$ и $\psi \neq 0$ и проверить, что она дает решение этой задачи Коши. Доказать формулу Кирхгофа для случая $\varphi \neq 0$ и $\psi \neq 0$. [5, § 5.1.2, 5.1.6].

9. Вывести методом спуска формулу Пуассона для решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$. Вывести из формулы Кирхгофа теорему о единственности решения задачи Коши для волнового уравнения. Доказать теорему о непрерывной зависимости классического решения задачи Коши от начальных данных и правой части волнового уравнения. Область зависимости решений волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$, конечная скорость распространения волн, передний и задний фронт волны. [2, § 5.4], [5, § 5.1.3, 5.1.5].

10. Привести формула интегрирования по частям и дать определение обобщенных производных по Соболеву. Доказать, что классические производные являются также обобщенными. Доказать единственность обобщенной производной. Дать определение пространства Соболева $H^1(\Omega)$. Доказать полноту пространства $H^1(\Omega)$. Дать определение пространства Соболева $H^1_0(\Omega)$. Доказать неравенство Фридрихса. Вывести из неравенства Фридрихса эквивалентность норм в $H^1_0(\Omega)$. [5, § 1.1, 1.2], [4, § 7].

11. Дать определение классического и обобщенного решения однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Доказать теорему о существовании, единственности и устойчивости обобщенного решения этой задачи с помощью теоремы Рисса. [5, § 3.13], [4, § 7].

12. Сформулировать вариационный принцип. Доказать свойства функционала $\Phi(u)$ в пространстве $H^1_0(\Omega)$: непрерывность, ограниченность снизу, эквивалентность точки минимума обобщенному решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона, сходимость любой минимизирующей последовательности в $H^1_0(\Omega)$. Доказать разрешимость вариационной задачи для $\Phi(u)$ в пространстве $H^1_0(\Omega)$. [5, § 3.13.3].

Список литературы

[1] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2003.

[2] Ильин А.М. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2009.

[3] Байков В.А., Жибер А.В. Уравнения математической физики. – Ижевск: РХД, 2003.

[4] Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. – М.: МЦНМО, 2003.

[5] Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными.–М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.

Порядок проведения экзамена

Экзамен письменный. Он будет состоять из двух частей: теоретической и практической. Теоретическая часть рассчитана на 1 час. Каждый студент получит билет из трех вопросов, взятых из разных пунктов приведенного выше списка. Необходимо достаточно подробно осветить каждый вопрос, привести относящиеся к нему определения, сформулировать требуемые свойства и теоремы, а также доказать их. Дополнительными материалами пользоваться не разрешается. Практическая часть будет проходить 2 часа. Каждый студент получит вариант с задачами, которые необходимо решить. Здесь разрешается пользоваться дополнительными рукописными материалами (записками лекций, семинаров и пр.) Оценка каждого студента будет определяться по результатам проверки экзаменационной работы, с учетом накопленных баллов за решений задач листков, участие в семинарах, а также будет зависеть от оценки, полученной за зачет в 3-ем модуле.