Задачи для подготовки к экзамену

7.1. Постройте изоморфизм колец $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/53\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/1007\mathbb{Z}$: для каждой пары остатков (a, b) укажите такое число x, что $x \equiv a \mod 19$ и $x \equiv b \mod 53$.

7.2. **а)** Пусть подгруппа $L \subset \mathbb{Z}^3$ порождена векторами $(0, 12, -12)$, $(4, 8, 28)$ и $(2, 10, 8)$. Найдите примарное разложение группы $\mathbb{Z}^3/L$.

б) Придумайте содержащую L подгруппу $L' \subset \mathbb{Z}^3$, для которой $\mathbb{Z}^3/L' = \mathbb{Z}$.

7.3. Перечислите подгруппы $L \subset \mathbb{Z}^2$, содержащие решетку, порожденную векторами (x, y), для которых x и y чётны и $x + y$ кратно 4, и опишите для каждой из них подгруппу $\mathbb{Z}^2/L$.

7.4. Разложите на простые множители в $\mathbb{Z}[i]$ число 2014.

7.5. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Найдите жорданову нормальную форму оператора $A \otimes B$.

7.6. Докажите, что если оператор A диагонализуем, то оператор $A^{\otimes k}$ тоже диагонализуем.

7.7. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите след оператора:

а) $\Lambda^2 A$;

б) $\Lambda^3 A$.

7.8. Докажите, что для $\xi \in \Lambda^k V$ и ненулевого $v \in V$ равенство $\xi \wedge v = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\xi = \theta \wedge v$ для некоторого $\theta \in \Lambda^{k-1} V$ (то есть ξ делится на v в алгебре $\Lambda^\bullet V$).