

ПРОГРАММА СПЕЦКУРСА
“ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ”

АЛЕКСЕЙ ГОРИНОВ, ВСЕВОЛОД ШЕВЧИШИН

Аннотация. Цель спецкурса: I. Введение в теорию эллиптических операторов и теорему Атья-Зингера об индексе. Разбор конкретных примеров.

II. Теория регулярности для (не)линейных эллиптических операторов. Теорема компактности à la Громов. Примеры применения.

1. ОБЩИЙ ОБЗОР

Эллиптические операторы играют фундаментальную роль в современной математике. Многие разделы геометрии и топологии в современном виде немислимы без применения этого инструмента. Цель данного спецкурса — дать обзор основ теории эллиптических операторов и её приложений.

Спецкурс делится условно на две части: I. Линейные эллиптические операторы и теорема Атья-Зингера об индексе. II. Нелинейные эллиптические операторы и слабая компактность пространств решений.

2. СОДЕРЖАНИЕ

Вот перечень тем которые предполагается рассмотреть:

- Основные факты о фредгольмовых операторах: определение, гомотопическая инвариантность индекса, теорема Кёйпера, теорема Атья-Йениха, операторы Винера-Хопфа (обзор).
- Эллиптические дифференциальные операторы и основные примеры (операторы эйлеровой характеристики, сигнатуры и Атья-Хирцебруха).
- Псевдодифференциальные операторы.
- Пространства Гёльдера и Соболева. Теоремы Соболева.
- Эллиптическая регулярность. Применение: теорема Ходжа о разложении.
- Комплексная K-теория. Теорема Ботта.
- Теорема об индексе и доказательство в евклидовом случае.
- Доказательство теоремы об индексе.
- Применения теоремы об индексе (теоремы целочисленности и невлжимости для многообразий; теорема Римана-Роха-Хирцебруха и т.д.)
- Эллиптическая регулярность и bootstrap-трик. Регулярность решений нелинейных эллиптических уравнений. Устранимые особенности.
- Сильная и слабая сходимость решений нелинейных эллиптических уравнений. “Пузырение” (bubbling).
- Теорема Сакса-Уленбек о пределе (почти)-гармонических отображений.
- Теорема компактности Громова для псевдоголоморфных отображений.
- Теорема Дональдсона о форме пересечения односвязных 4-многообразий.
- Компактификация пространства модулей стабильных голоморфных расслоений и ASD-связностей на 4-многообразиях.

3. ПРЕРЕКВИЗИТЫ.

Курс рассчитан на студентов начиная с 3-го курса бакалавриата, готовых выучить (или принять на веру) необходимые недостающие темы и сведения.

Предполагается знакомство с топологией (материал курса "Введение в топологию" для 1-2 курсов плюс какое-то представление о сингулярных когомологиях), гладкими многообразиями (определения многообразий, касательного и кокасательного расслоений, дифференциальных форм и метрик) и анализом (нужно знать, что такое гильбертовы, банаховы и L^p -пространства и непрерывные операторы между банаховыми пространствами; все это с лихвой покрывается курсом "Функциональный анализ" для 3-4 курсов). Было бы также неплохо предварительно прочесть 1 часть книги Бооса и Бликера из следующего списка. Во второй части будут использоваться сведения из дифференциальной геометрии, такие как векторные расслоения, связность и её кривизна, а также из комплексного анализа (в основном ТФКП из 2-го семестра 2-го курса) и алгебраической геометрии (например, спецкурс Городенцева и/или Америк).

4. ЛИТЕРАТУРА.

Базисными пособиями в первой части будут

- В. Booss, D. D. Bleecker, *Topology and Analysis. The Atiyah-Singer Index Formula and Gauge-theoretic Physics*. Springer, Universitext.
- Н. В. Lawson, М.-L. Michelsohn, *Spin geometry*. Princeton University Press, Princeton Mathematical Series.
- Р. Пале, *Семинар по теореме Атья-Зингера об индексе*, Мир.

Литература ко второй части будет дана в курсе.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ», 117312, г. Москва, ул. Вавилова, д. 7, Тел.(Секр.): +7 (495) 772-95-90 *4144, *4147

E-mail
shevchishin@gmail.com

address:

gorinov@mccme.ru,