

ПРОГРАММА СПЕЦКУРСА
“СИСТЕМЫ КОКСТЕРА, ГРУППЫ ОТРАЖЕНИЙ
И ГРУППЫ КОС”

ВЛАДИМИР ЖГУН, ВСЕВОЛОД ШЕВЧИШИН

Аннотация. Цель спецкурса: Знакомство с теорией групп порожденных отражениями, системами корней, системами Кокстера и группами кос, а на их примере — с геометрической и комбинаторной теорией групп.

1. ОБЩИЙ ОБЗОР

Группы отражений и системы корней — одна из самых красивых областей математики. Их изучение началось с решения задачи о классификации правильных многогранников (“платоновых тел”) в произвольной размерности n . Одной из важнейших областей применения групп отражений является теория групп и алгебр Ли, где они появляются в обличи групп Вейля и играют важнейшую роль во всех частях этой теории.

Другая важная область применения комбинаторики систем Кокстера, систем корней и групп отражений — это топология. Здесь мы встретим простое комбинаторное описание групп кос, обобщение групп кос для любой системы Кокстера, элементы Гарсайда и связанную с ними теорию, а также сравнительно простое описание групп классов отображений в терминах групп кос и элементов Гарсайда.

Примечание: Курс доступен для студентов начиная с первого курса! В качестве предварительных знаний предполагается лишь “обычная школьная” геометрия и знакомство с линейной алгеброй.

2. СОДЕРЖАНИЕ

I. Группы отражений.

- (1) Отражения. Корни. Простые и положительные корни.
- (2) Сопряженность различных систем положительных и простых корней.
- (3) Простые отражения как система порождающих групп отражений.
- (4) Функция длины. Условие сокращения и условие замены. Элемент максимальной длины.
- (5) Задание группы отражений образующими и соотношениями.
- (6) Параболические подгруппы и минимальные представители смежных классов.
- (7) Камеры Вейля и фундаментальная область.
- (8) Функция “ширины”. Разложение элемента в минимальное произведение отражений (не обязательно простых).
- (9) Теорема Вальдспурже (Вальдшпургера). Теорема о неподвижной точке.
- (10) Классификация положительно определенных и неотрицательно определенных графов Кокстера.
- (11) Кристаллографические системы корней и группы Вейля. Схемы Дынкина. Решетки корней, кокорней, весов и ковесов.
- (12) Системы корней классических простых алгебр Ли.
- (13) Системы корней исключительных алгебр Ли.
- (14) Полиномиальные инварианты конечных групп. Теорема Гильберта о базисе. Теорема Нетер.

- (15) Теорема Шевалле, базисные инварианты.
- (16) Псевдоотражения, комплексные группы отражений. Теорема Шепарда-Тодда о группах со свободными алгебрами инвариантов.
- (17) Чудесное тождество Де Кончини-Прочези. Формула Соломона.
- (18) Знакопеременные многочлены.
- (19) Элемент Кокстера, число Кокстера.

II. Группы Кокстера.

- (1) Базисные понятия комбинаторной теории групп. Свободные группы и их комбинаторные свойства.
- (2) Копредставления (“задания”) групп. Проблемы изоморфизма, слов и сопряжений.
- (3) Абстрактные системы Кокстера и группы Кокстера.
- (4) t -последовательности. Функция длины и условия сокращения и замены в группах Кокстера.
- (5) Группы отражений в аффинных и гиперболических пространствах. Альковы. Задание аффинных и гиперболических групп отражений образующими и соотношениями.
- (6) Геометрическое представление группы Кокстера. Положительные и отрицательные векторы в геометрическом представлении.
- (7) Параболические подгруппы. Геометрический смысл функции длины.
- (8) Проблема Гурвица и её геометрический и топологический смысл. Проблема Гурвица в общих группах Кокстера.
- (9) Начальные и конечные буквы и под слова элементов групп Кокстера.

III. Обобщённые группы кос.

- (1) Геометрическое определение группы кос.
- (2) Стандартные образующие группы кос и соотношения между ними.
- (3) Группа кос данной системы Кокстера.
- (4) Чистые/крашенные группы кос. Образующие и соотношения в группе крашенных кос. Метод Райдемайстера–Шрайера.
- (5) Группы кос и крашенных кос как фундаментальная группа
- (6) Элемент Гарсайда и нормальная форма элемента в группе кос. “Естественные” факторизации квадратного элемента Гарсайда Δ^2 .
- (7) $Sl(2, \mathbb{Z})$ как фактор группы кос $B\mathbb{r}_3$ по элементу Δ^4 .
- (8) Группы классов отображений поверхностей. Скручивание Дена. Группа кос как группа классов отображений.
- (9) Группа кос и группа классов отображений двулистного накрытия. Цепное, фонарное и звёздное соотношения в группе классов отображений.
- (10) Копредставление группы классов отображений. Случай малого рода.

3. ЛИТЕРАТУРА.

- (1) J. Humphreys; Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge University Press, 1990.
- (2) Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман; Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны, Итоги науки и техники, ВИНТИ, Совр. проб. мат., Фунд. направления - 1988 - том 29 (Геометрия-2) - стр. 147 - 264.
- (3) Э. Б. Винберг и А. Л. Онищик; Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. - М.: Наука, 1988.
- (4) Н. Бурбаки; Элементы математики, Группы и алгебры Ли, Главы IV-VI, М.: Мир, 1972.
- (5) Э. Б. Винберг; Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского, Математический сборник, Т. 72/114 (1967), No.3.
- (6) Ch. Kassel, V. Turaev; Braid Groups, Graduate Texts in Mathematics, **247**, Springer, New York, (2008), 340 p. + xii, ISBN 978-0-387-33841-5.

(7) А. Б. Сосинский; Узлы и косы, — М: МЦНМО, 2001.

Дальнейшая литература будет дана в ходе курса.

4. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ.

Единственные необходимые предварительные сведения для курса — это базисная линейная алгебра и “обычная школьная” геометрия, а также основные понятия математики (множество, отображение, группа, гомоморфизм, итд.) Мы надеемся и постараемся чтобы спецкурс был понятен мотивированным студентам начиная с 1-го курса Матфака.

Полезны будут сведения из теории групп и алгебр Ли.

Для понимания второй части курса желательны элементарные сведения из топологии: косы и узлы, поверхности, их классификация, фундаментальная группа топологического пространства.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ», 117312, г. Москва, ул. Вавилова, д. 7, Тел.(Секр.): +7 (495) 772-95-90 *4144, *4147
E-mail address: shevchishin@gmail.com, zhgoon@mail.ru