C^*-алгебры и компактные квантовые группы

(спецкурс, весенний семестр 2014–2015 уч. года)

Лектор — доц. А. Ю. Пирковский

Теория C^*-алгебр — алгебраическое направление в функциональном анализе, которое возникло в 1940-х гг. в основополагающих работах И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка и за прошедшее с тех пор время превратилось в чрезвычайно глубокую и разветвленную математическую дисциплину. C^*-алгебра — это $\mathbb{C}$-алгебра, снабженная нормой и инволюцией, которые удовлетворяют некоторым аксиомам согласованности. Базовые примеры C^*-алгебр — алгебра $C(X)$ непрерывных функций на компактном топологическом пространстве X и алгебра $\mathscr{B}(H)$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H. Эти примеры «универсальны» благодаря следующим теоремам Гельфанда–Наймарка: (1) каждая коммутативная C^*-алгебра с единицей изоморфна $C(X)$ для некоторого компакта X, и (2) каждая C^*-алгебра изометрически вкладывается в $\mathscr{B}(H)$ для некоторого гильбертова пространства H. Первая теорема Гельфанда–Наймарка (утверждение (1) выше) лежит в фундаменте некоммутативной геометрии (в смысле А. Конна) и теории компактных квантовых групп.

Теория компактных квантовых групп была создана в основном С. Л. Вороновичем в 1980-х–1990-х гг. Грубо говоря, компактная квантовая группа — это «деформация» алгебры непрерывных функций на компактной топологической группе. Таким образом, согласно известной поговорке, квантовые группы не являются «ни квантовыми, ни группами». В теории Вороновича компактная квантовая группа — это C^*-алгебра, снабженная дополнительной структурой (коумножением), удовлетворяющей некоторым естественным аксиомам[1]. Многие классические результаты теории компактных групп (существование и единственность меры Хаара, полная приводимость унитарных представлений, теорема Петера–Вейля, двойственность Таннаки–Крейна и т.п.) имеют естественные «квантовые» аналоги. Теория компактных квантовых групп — лишь небольшая часть намного более общей (и намного более трудной) теории локально компактных квантовых групп, разработанной Й. Кустермансом и С. Ваасом в начале 2000-х гг. В настоящее время эта наука является одной из наиболее популярных и активно развивающихся областей теории операторных алгебр.

Цель курса — дать элементарное введение в теорию C^*-алгебр и компактных квантовых групп. В качестве мотивировки будут также обсуждаться некоторые факты об унитарных представлениях компактных групп.

Пререквизиты. Теория интеграла Лебега и основы функционального анализа. Полезным будет также некоторое знакомство с теорией представлений конечных групп.

Краткая программа

1. **C^*-алгебры.** Основные определения и примеры. Коммутативные C^*-алгебры и первая теорема Гельфанда–Наймарка. Функциональное исчисление и положительные элементы C^*-алгебр. Представления C^*-алгебр. Положительные функционалы и ГНС-конструкция. Вторая теорема Гельфанда–Наймарка. Некоторые конструкции: алгебры мультиплткаторов, тензорные произведения C^*-алгебр, C^*-оболочки. Базовые факты о гильбертовых C^*-модулях.

2. **Компактные группы.** Мера Хаара. Унитарные представления. Процедура усреднения. Конечномерность неприводимых представлений. Разложение унитарных представлений на неприводимые. Теорема Петера–Вейля. Соотношения ортогональности. Преобразование Фурье и его обратное. Теорема Планшереля. Двойственность Таннаки–Крейна.

3. **Компактные квантовые группы.** Определения и примеры (квантовая $SU(n)$, квантовая $SO(n)$, свободная унитарная и свободная ортогональная квантовые группы). Коммутативные компактные квантовые группы. Состояние Хаара. Унитарные копредставления. Разложение на неприводимые. Соотношения ортогональности. Подалгебра Хопфа матричных элементов конечномерных копредставлений. Замечания о спаривании с квантовыми обертывающими алгебрами. Двойственность Таннаки–Крейна.

---

[1] Подход к квантовым группам, опирающийся на C^*-алгебры, тесно связан с более известным алгебраическим подходом (см. тему 3) посредством двойственности, вещественных форм и C^*-пополнений, но в общем случае между ними нет взаимно однозначного соответствия.