Алгебра II, осенний семестр 2013 г.

Задачи для семинара 1.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Может ли вещественная 5×5 матрица A удовлетворять следующим уравнениям

(а) $(x^2+1)^m(x^2-1)^n = 0$; (б) $(x^2+1)^m(x^2+2)^n = 0$; (в) $(x^5-1)^m = 0$

для некоторых натуральных m и n? Если такая матрица существует, то чему может быть равен её минимальный многочлен?

Задача 2. Является ли факторкольцо $\mathbb{Z}[x]/(x^2+x+1, p)$ полем при

(а) $p = 2$; (б) $p = 3$; (в) $p = 5$?

Задача 3. Найдите все нормальные подгруппы в группе симметрий

(а) правильного шестиугольника; (б) тетраэдра; (в) куба.

Задача 4. (а) Пусть V — пространство 2×2 вещественных симметрических матриц. Определим на V билинейную форму

$$(A, B) = \det(A+B) - \det(A) - \det(B)$$

(такая форма называется *смешанным определителем*). Найдите сигнатуру формы $(\cdot, \cdot)$ на V.

(б) Докажите, что форма $(\cdot, \cdot)$ из пункта (а) является удвоенной поляризацией определителя.

(в) Пусть V — пространство 3×3 вещественных симметрических матриц. Обозначим через $m\det$ поляризацию определителя, то есть смешанный определитель (это трилинейная форма). Зафиксируем $C \in V$ и определим на V билинейную форму

$$(A, B)_C = m\det(A, B, C).$$

Найдите сигнатуру формы $(\cdot, \cdot)_C$ на V.

(г)* **Неравенство Александрова–Фенхеля на смешанные дискриминанты.** Обобщите результат пункта (в) на вещественные симметрические $n \times n$ матрицы.

Задача 5. (а) Определите биективное соответствие между максимальными иделами в кольце $\mathbb{C}[x]$ и точками плоскости.

(б) Определите биективное соответствие между максимальными идеалами в кольце $C[0, 1]$ непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ и точками отрезка $[0, 1]$.