

Домашнее задание 1. Срок сдачи 9 сентября.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в TeX.

Задача 1. вещественная 5×5 матрица A удовлетворяет уравнению

$$(x - 1)^m(x^2 + 1)^n = 0$$

для некоторых натуральных m и n . Чему может быть равен минимальный многочлен матрицы A ?

Задача 2. Обозначим через \mathbb{F}_p поле из p элементов. Является ли факторкольцо $\mathbb{F}_p[x]/(x^3 + x + 1)$ полем при

(а) $p = 2$; (б) $p = 3$?

Задача 3. Найдите все нормальные подгруппы в группе симметрий квадрата.

Задача 4. Пусть $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ пространство вещественных 2×2 матриц. Определим на V форму

$$(A, B) = \det(A + B) - \det(A) - \det(B)$$

(такая форма называется *смешанным определителем*).

- (а) Докажите, что форма (\cdot, \cdot) билинейна и симметрична.
- (б) Выпишите матрицу формы (\cdot, \cdot) в стандартном базисе.
- (в) Найдите сигнатуру формы (\cdot, \cdot) .

Задача 5. Определите биективное соответствие между максимальными идеалами в кольце $\mathbb{R}[x]$ и точками верхней полуплоскости.