Алгебра II, осенний семестр 2013 г.

Задачи для семинара 2.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Является ли симметрическим многочлен
(а) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 \quad (n = 2)$; (б) $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_1 + x_3) \quad (n = 3)$;
(в) $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_4)(x_1 + x_4) \quad (n = 4)$ (г) $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3$?
Если да, найдите его представление через элементарные симметрические функции.

Задача 2. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — корни многочлена

$$f = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Определим дискриминант многочлена $D(f)$ как

$$\prod_{i<j}(x_i - x_j).$$

(а) Докажите, что $D^2(f)$ является симметрическим многочленом, если его рассматривать как многочлен от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

(б) Выразите через p и q дискриминант кубического многочлена

$$x^3 + px + q.$$

(в) Та же задача для многочлена пятой степени

$$x^5 + px + q.$$

Задача 3. (а) Для каких простых чисел p многочлен $x^3 + x^2 - 2x - 1$ имеет кратный корень в поле $\mathbb{F}_p$ из p элементов?

(б) Пусть $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ — минимальное подполе, содержащее все корни многочлена $x^3 + 3x + 1$. Найдите размерность поля $\mathbb{F}$ как векторного пространства над $\mathbb{Q}$.

Задача 4. Будем рассматривать пространство $S_{n,d}$ однородных симметрических многочленов степени d от n переменных с коэффициентами в поле K как векторное пространство над K. Постройте базис в $S_{n,d}$. Найдите размерность пространства $S_{n,d}$ для $n = 2$ и произвольного d.

Задача 5. Обозначим через S идеал в кольце многочленов $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, порождённый всеми однородными симметрическими многочленами ненулевой степени. Докажите, что факторкольцо $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ является свободной абелевой группой, и найдите её ранг.