ТЕМЫ КУРСОВЫХ РАБОТ

Валентина Алексеевна Кириченко

1. Темы для 1-2 курса

1.1. **Многогранники Ньютона и теорема Кушниренко.** Классическая теорема Безу о числе общих нулей n многочленов от n комплексных переменных верна для многочленов общего положения, и выражает число нулей через степени многочленов. Теорема Кушниренко обобщает теорему Безу, и выражает число нулей через многогранники Ньютона ("обобщенные степени") многочленов.

Литература:

• Многогранники и уравнения, В.А.Тиморин, А.Г.Хованский // Математическое просвещение. Сер. 3, 2010. вып. 14. С. 30–57

• Polynomial equations and convex polytopes, B. Sturmfels // American Mathematical Monthly, **105** (1998), 907-922

1.2. **Многочлены Шуберта.** По каждой перестановке w на n элементах можно определить многочлен S_w от n переменных с целыми коэффициентами (*многочлен Шуберта*). Многочлены Шуберта изначально возникли для описания исчисления Шуберта на многообразии полных флагов в n-мерном пространстве (обобщении грассманиана), а затем стали активно изучаться комбинаторными методами. В частности, была придумана комбинаторная операция (*митоз*), которая позволяет без сокращений выписывать все мономы в S_w по мономам в S_{ws_i}, если $l(ws_i) < l(w)$. Тем самым, есть эффективный алгоритм вычисления многочленов Шуберта (в частности, из него следует, что коэффициенты многочленов неотрицательны). Тема для 1-2 курса — теорема Кириллова–Фомина, дающая комбинаторное описание мономов в многочлене Шуберта через приведенные диаграммы (pipe-dreams), реализуюшие данную перестановку. Тема для самостоятельного обдумывания — доказательство теоремы Кириллова–Фомина через митоз. Тема для 2 курса — теорема Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда и Демазюра о представлении циклов Шуберта на многообразии полных флагов многочленами Шуберта. У этих тем есть продолжение с открытыми задачами (см. (2.1)).

Литература:

• Mitosis recursion for coefficients of Schubert polynomials, E. Miller // J. Comb. Theory A, **103** (2003), no. 2, 223-235

• The Yang-Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials, A. Kirillov, S. Fomin // Discrete Mathematics, **153** (1996), 123-143

• Symmetric functions, Schubert polynomials and degeneracy loci, L. Manivel // SMF/AMS Texts and Monographs 6, 2001; (имеется неопубликованный русский перевод); *Очень хорошо написанная книга о комбинаторике и геометрии многообразий флагов, в частности, в главе 2 содержится теорема Кириллова–Фомина с доказательством.*

1.3. **Цепная дробь для числа e.** Интересно, что коэффициенты цепной дроби для e (основания натурального логарифма) подчиняются простой закономерности.

Литература:

- Цепные дроби, А.Я.Хинчин // М.: Физматлит, 1960
- Gauss's continued fraction // статья в Википедии
- Continued fraction for e, Todd and Vishal blog

1.4. **Решение уравнений в радикалах.** Как найти явные формулы для корней уравнений степени 3 и 4? Почему не существует таких формул для корней уравнений более высоких степеней? Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

Литература:

- Теория Галуа, накрытия и римановы поверхности, А.Г.Хованский // М.: МЦНМО, 2007
- Арифметические исследования, К.Ф.Гаусс // М.: АН СССР, 1959

1.5. **Группа монодромии гипергеометрической функции Гаусса.** Гипергеометрическая функция Гаусса ${}_2F_1(a, b, c; z)$ — специальная функция одной комплексной переменной. Может быть задана как сумма (гипергеометрического) ряда, как интеграл или как решение фуксова дифференциального уравнения второго порядка с тремя особыми точками. Группу монодромии гипергеометрической функции можно найти явно (например, задать образующими и соотношениями), в частности, можно узнать при каких значениях комплексных параметров a, b, c она разрешима, коммутативна или конечна.

Литература:

- Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения, А.А.Болибрух // М.: МЦНМО, 2000
- Курс высшей математики (том 3, часть 2, глава 5, пп 95–104), В.И.Смирнов // М.: Наука, 1974
- Высшие трансцендентные функции (том 1, глава 2, пп 2.1-2.7), Г.Бейтмен, А.Эрдейи // М.: Наука, 1965

(все необходимые определения и методы для решения задачи можно найти в этих книгах, но самого решения в них нет)

1.6. **Обобщённая задача Чаплыгина.** Пилот самолёта хочет за фиксированное время облететь наибольшую площадь. Какова оптимальная траектория полёта для данной зависимости максимальной скорости самолёта от направления? Например, в условиях постоянного ветра, который сносит самолёт с одной и той же скоростью в одном и том же направлении получается обычная задача Чаплыгина (оптимальная траектория — эллипс). В частности, если ветра нет вовсе, то получается классическая изопериметрическая задача (оптимальная траектория — окружность). Предлагается найти другие интересные примеры, в которых оптимальная траектория может быть явно описана.

Литература:

- Обобщённая задача Чаплыгина // презентация семинара
- Оптимальное управление, В.М.Алексеев, В.М.Тихомиров, С.В.Фомин // М. : Физматлит, 2005.
- Много ли человеку земли нужно? Л.Н.Толстой

1.7. **Полные коники.** Сколько гладких коник (на комплексной проективной плоскости) касается пяти данных коник? Классическая задача исчислительной геометрии, поставленная Штейнером и решенная Шалем. Имеет важное историческое значение, так как поиски строгого решения стимулировали развитие разных областей алгебраической геометрии. Тот же вопрос можно задать для вещественной проективной плоскости. В этом случае задача гораздо сложнее, есть только частичные результаты.

Литература:

• Принципы алгебраической геометрии (том 2, глава 6, п 1), Ф. Гриффитс, Дж. Харрис // М.: Мир, 1982; *Содержит как строгое решение методами алгебраической геометрии, так и неформальное элементарное решение методом Шаля.*

• Chasles's enumerative theory of conics: A historical introduction, S.Kleiman // Studies in Algebraic Geometry, Mathematical Association of America Studies in Mathematics, **20**, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1980, 117-138 (имеется электронная версия); *Интересный исторический очерк о задаче Шаля и ее влиянии на развитие теории пересечений.*

• Towards relative invariants of real symplectic 4-manifolds, Jean-Yves Welschinger// Geom. Funct. Anal., **16** (2006), no. 5, 1157–1182; *Оценки снизу в вещественном случае.*

2. Темы для 3-4 курса и магистратуры

2.1. Геометрический митоз. Комбинаторный митоз изначально был придуман Кнутсоном и Миллером для эффективного вычисления многочленов Шуберта (см. 1.2). Затем появилась геометрическая реализация митоза, как операции на гранях многогранника Гельфанда–Цетлина. В таком виде митоз обобщается на более широкий класс многогранников, связанных с произвольными редуктивными группами и группами Коксетера (многогранник Гельфанда–Цетлина связан с GL_n и S_n). Интересно изучить возникающую при этом комбинаторику и её приложения к исчислению Шуберта на многообразиях флагов для произвольных редуктивных групп. Пока разобран только случай GL_n и Sp_4.

Литература:

• Mitosis recursion for coefficients of Schubert polynomials, Ezra Miller // J. Comb. Theory A, 103 (2003), no. 2, 223-235

• Geometric mitosis, V. Kiritchenko

• Исчисление Шуберта и многогранники Гельфанда–Цетлина,

В.А.Кириченко, Е.Ю.Смирнов, В.А.Тиморин // Успехи математических наук, **67** (2012), вып. 4 (406), С. 89–128

2.2. Многогранники Ньютона–Окунькова многообразий Ботта–Самельсона. Выпуклые тела Ньютона–Окунькова — это новая бурно развивающаяся область алгебраической геометрии, идейно связанная с торической геометрией и теорией многогранников Ньютона. Пока известно очень мало явных описаний тел Ньютона–Окунькова для неторических многообразий. Особенно интересны случаи, когда они оказываются многогранниками. В качестве темы предлагается вычислить многогранники Ньютона–Окунькова важного класса многообразий — разрешений Ботта-Самельсона многообразий Шуберта. Имеется гипотеза о том, как устроены эти многогранники для одного из естественных геометрических нормирований. Гипотеза подтверждена для разрешений Ботта–Самельсона многобразий флагов GL_3/B и Sp_4/B. Для другого нормирования имеется связь со струнными многогранниками Беренштейна–Зелевинского–Литтельманна из теории представлений.

Литература:

• Okounkov bodies and toric degenerations, D. Anderson // Math. Ann., **356** (2013), no. 3, 1183–1202

• Crystal bases and Newton–Okounkov bodies, K. Kaveh

• Divided difference operators on convex polytopes, V. Kiritchenko

• Geometric mitosis, V. Kiritchenko

• Multiplicities and Newton polytopes, Andrei Okounkov // Kirillov's seminar on representation theory, 231-244, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 181, , Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

2.3. **Исчисление Шуберта.** Сколько прямых в трёхмерном пространстве пересекает четыре данные? Сколько прямых в $\mathbb{R}^4$ пересекает 6 данных плоскостей? На эти и многие другие вопросы отвечает исчисление Шуберта. Исчисление Шуберта на грассманниане изучено лучше всего. Следующий по простоте случай — двушаговые многообразия флагов. Существует много разных способов вычислять произведения циклов Шуберта на грассманниане (так называемые правила Литтльвуда–Ричардсона). Некоторые из них обобщаются на двушаговые многообразия флагов. Вопрос об универсальном правиле Литтльвуда–Ричардсона для всех многообразий флагов (например, для многообразия полных флагов) пока открыт. Есть несколько подходов к правилу Литтльвуда–Ричардсона (см. ниже), в том числе подход, использующий выпуклую геометрию и комбинаторику многогранника Гельфанда–Цетлина. Для многообразий полных флагов в $\mathbb{C}^3$ и $\mathbb{C}^4$ этот подход даёт положительное правило Литтльвуда–Ричардсона. Для произвольного n вопрос открыт.

Литература:

• Исчисление Шуберта и многогранники Гельфанда–Цетлина,

В.А.Кириченко, Е.Ю.Смирнов, В.А.Тиморин // Успехи математических наук, **67** (2012), вып. 4 (406), С. 89–128; *Исчисление Шуберта на многообразии полных флагов моделируется через пересечение граней в многогранниках. Тем самым можно пытаться использовать комбинаторику многогранников для построения правила Литтльвуда–Ричардсона на многообразии полных флагов.*

• The honeycomb model of $GL(n)$ tensor products II: Puzzles determine facets of the Littlewood-Richardson cone, Allen Knutson, Terence Tao, Christopher Woodward// Journal of the AMS, **17** (2004), 19–48; *Симметричное правило Литтльвуда–Ричардсона через паззлы. В приложении к статье Вакила (см. ниже) обсуждается его связь с геометрическим правилом. Недавно было получено обобщение формулы с паззлами на двушаговые многообразия флагов.*

• Symmetric functions, Schubert polynomials and degeneracy loci, L. Manivel // SMF/AMS Texts and Monographs 6, 2001 (имеется неопубликованный русский перевод); *Очень хорошо написанная книга о комбинаторике и геометрии многообразий флагов, в частности, в главе 1 — классическое правило Литтльвуда-Ричардсона, в главе 3 — основы исчисления Шуберта на многообразии полных флагов.*

• A geometric Littlewood–Richardson rule, Ravi Vakil // Ann. of Math.(2), **164** (2006), 371–421; *Геометрический способ умножать циклы Шуберта: пересечение многообразий Шуберта последовательно вырождается в объединение многообразий Шуберта. Известно обобщение на двушаговые многообразия флагов, но оно использует очень сложную комбинаторику.*

2.4. **Многогранники Гельфанда–Цетлина.** Многогранники Гельфанда–Цетлина впервые появились в теории представлений, затем использовались в алгебраической геометрии. Их можно определить элементарно с помощью простых неравенств. Про их комбинаторику почти ничего неизвестно. Например, число вершин вычислено только в самых простых случаях.

Литература:

• Counting vertices in Gelfand-Zetlin polytopes, P. Gusev, V. Kiritchenko, V. Timorin // J. of Comb. Theory, Series A **120** (2013), 960–969; *Посчитано число вершин в частных случаях, найдено уравнение на производящую функцию числа вершин в общем случае. Сформулированы открытые задачи.*