Алгебра II, осенний семестр 2014 г.

Домашнее задание 3. Срок сдачи 23 сентября.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде и обязательно указывать НОМЕР ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ на титульном листе. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в TeX.

Задача 1. Найдите сумму чисел, обратных комплексным корням многочлена

$$3x^3 + 2x^2 - 1.$$

Задача 2. Для каких простых чисел p многочлены $x^3 - 3x^2 + 1$ и $2x^4 - 5x^2 - x - 1$ имеют общий корень в поле $\mathbb{F}_p$ из p элементов?

Задача 3. Для какого наименьшего натурального числа n существуют такие многочлены $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, что в кольце многочленов $\mathbb{Z}[x]$ выполнено тождество

$$(x^3 + x + 1)f(x) + (3x^2 + 2)g(x) = n?$$

Задача 4. Найдите сумму k-тых степеней корней многочлена

$$x^n + \frac{x^{n-1}}{1!} + \frac{x^{n-2}}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

для всех $k \leq n$.

Задача 5. Определим многочлен $h_i(x_1, \ldots, x_n)$ формулой

$$h_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_i \leq n} x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_i}.$$

Докажите, что каждый симметрический многочлен $x_1, \ldots, x_n$ является многочленом от $h_1, \ldots, h_n$.