Алгебра II, осенний семестр 2014 г.

Задачи для семинара 4.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Найдите многочлен четвёртой степени, корнями которого являются квадраты комплексных корней многочлена

$$x^4 + 2x^3 - x + 3.$$

(б) Пусть η — первообразный корень степени k из единицы, а $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ — многочлен. Докажите, что многочлен $f(x)f(\eta x)\cdots f(\eta^{k-1}x)$ представим в виде $h(x^k)$ для некоторого многочлена $h(x)$, и корни многочлена h — это в точности k-ые степени корней многочлена f.

Задача 2. (а) Докажите, что дискриминант многочлена $P(t) = (t - x_1)\cdots(t - x_n)$ равен квадрату *определителя Вандермонда*

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) := \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

(б) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — кососимметрический многочлен от x_1,..., x_n. Докажите что, $f(x_1, \ldots, x_n) = \Delta(x_1, \ldots, x_n)g(x_1, \ldots, x_n)$, где $g(x_1, \ldots, x_n)$ — симметрический многочлен.

(в) Пусть $h(x_1, \ldots, x_n)$ — симметрический многочлен от x_1,..., x_n, причём

$$h(x_1, x_1, x_3, \ldots, x_n) = 0.$$

Докажите что, $h(x_1, \ldots, x_n) = \Delta^2(x_1, \ldots, x_n)g(x_1, \ldots, x_n)$, где $g(x_1, \ldots, x_n)$ — симметрический многочлен.

Задача 3. Дана 3×3-матрица A, и известно, что $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^2 = \operatorname{tr} A^3 = 1$. Найдите характеристический многочлен матрицы A.

Задача 4. Для всех натуральных чисел m и n вычислите

(а) дискриминант многочлена $x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$;

(б) результант многочленов $x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$ и $x^m + x^{m-1} + \ldots + 1$.

Задача 5. Пусть R — область целостности, и $f, g \in R[t]$. Докажите, что $\operatorname{Res}(f, g)$ всегда лежит в идеале кольца $R[t]$, порождённом f и g.

Problem 1. (a) Find a polynomial of degree 4 whose roots coincide with the 4-th powers of the complex roots of the polynomial

$$x^4 + 2x^3 - x + 3.$$

(б) Let η be a primitive k-th root of unity, and $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ a polynomial. Prove that the polynomial $f(x)f(\eta x)\cdots f(\eta^{k-1}x)$ can be represented as $h(x^k)$ for some polynomial $h(x)$, and the roots of h coincide with the k-th powers of the roots of f.

Problem 2. (a) Prove that the discriminant of the polynomial $P(t) = (t-x_1)\cdots(t-x_n)$ is equal to the square of the *Vandermonde determinant*

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) := \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

(b) Let $f(x_1, \dots, x_n)$ be an alternating polynoial in $x_1, \dots, x_n$. Prove that $f(x_1, \dots, x_n) = \Delta(x_1, \dots, x_n)g(x_1, \dots, x_n)$, where $g(x_1, \dots, x_n)$ is a symmetric polynomial.

(c) Let $h(x_1, \dots, x_n)$ be a symmetric polynomial in $x_1, \dots, x_n$ such that

$$h(x_1, x_1, x_3, \dots, x_n) = 0.$$

Prove that $h(x_1, \dots, x_n) = \Delta^2(x_1, \dots, x_n)g(x_1, \dots, x_n)$, where $g(x_1, \dots, x_n)$ is a symmetric polynomial.

Problem 3. A 3×3-matrix A satisfies $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^2 = \operatorname{tr} A^3 = 1$. Find the characteristic polynomial of A.

Problem 4. For all positive integer m and n, compute

(a) the discriminant of $x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$;

(b) the resultant of $x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$ and $x^m + x^{n-1} + \ldots + 1$.

Problem 5. Let R be an integral domain, and $f, g \in R[t]$. Show that $\operatorname{Res}(f, g)$ always lies in the ideal of $R[t]$ generated by f and g.