Алгебра II, осенний семестр 2014г.

Решения домашнего задания 1.

М.Матушко и А.Трофимова

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Вещественная 5×5 матрица A удовлетворяет уравнению

$$f(x) = (x-1)^m(x^2+1)^n = 0$$

для некоторых натуральных m и n. Чему может быть равен минимальный многочлен матрицы A?

Решение: Так как матрица A нечетного размера, то ее характеристический многочлен имеет хотя бы один действительный корень. Этот же корень имеет и минимальный многочлен. Следовательно, этот корень равен 1, а минимальный многочлен содержит множитель $(x-1)$. Учитывая, что степень минимального многочлена не превосходит степень характеристического, несложно перечислить все варианты минимального многочлена и привести примеры матриц:

$(x-1)$, $A = \mathrm{Id}$;

$(x-1)^2$,$(x-1)^3$,$(x-1)^4$,$(x-1)^5$ являются минимальными многочленами матриц с собственными знчениями 1, имеющими жордановы клетки размеров 2 (но не выше), 3, 4, 5, соответственно;

$(x-1)(x^2+1)$, $(x-1)^2(x^2+1)$, $(x-1)^3(x^2+1)$, для которых матрицы можно представить в блочном виде, так что они обязательно содержат жордановы клетки соответствующих размеров и матрицу 2×2 вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Остается минимальный многочлен вида $(x-1)(x^2+1)^2$, для которого матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Обозначим через $\mathbb{F}_p$ поле из p элементов. Является ли факторкольцо $\mathbb{F}_p[x]/(x^3+x+1)$ полем при

(а) $p = 2$; (б) $p = 3$?

Решение: Чтобы факторкольцо было полем необходимо и достаточно, чтобы многочлен x^3+x+1 был неприводим в $\mathbb{F}_p[x]$. Действительно, если x^3+x+1 неприводим, то поскольку кольцо $\mathbb{F}_p[x]/(x^3+x+1)$ евклидово, к любому многочлену, не лежащему в (x^3+x+1) можно найти обратный по модулю (x^3+x+1). Если же многочлен x^3+x+1 приводим, то в его разложении всегда будет линейный множитель, что равносильно наличию корней в поле $\mathbb{F}_p[x]$. Следовательно, $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x+1)$ — поле, $\mathbb{F}_3[x]/(x^3+x+1)$ не является полем.

Задача 3. Найдите все нормальные подгруппы в группе симметрий квадрата.

Решение: В группе симметрий квадрата четыре поворота: id, r, r^2, r^3, четыре отражения s_1, s_2 относительно прямых, соединяющих середины противоположных сторон, s_3, s_3 относительно диагоналей. Отражения не сохраняются при сопряжении поворотом на $90°$. Кроме тривиальных (вся группа и единица) нормальными будут группа всех поворотов, группа, порожденная r^2 (поворотом на $180°$), а также группы $\{s_1, s_2, id, r^2\}$, $\{s_3, s_4, id, r^2\}$.

Задача 4. Пусть $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ пространство вещественных 2×2 матриц. Определим на V форму

$$(A, B) = \det(A + B) - \det(A) - \det(B)$$

(а) Докажите, что форма $(\cdot, \cdot)$ билинейна и симметрична.

(б) Выпишите матрицу формы $(\cdot, \cdot)$ в стандартном виде.

(в) Найдите сигнатуру форму $(\cdot, \cdot)$.

Решение: (а) Симметричность очевидна, билинейность проверяется прямой подстановкой.

(б) Выберем базис матричных единиц $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ и выпишем матрицу формы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(в) Найдем сигнатуру путем выписывания формы

$$(X, X) = 2x_{11}x_{22} - 2x_{21}x_{12} = \frac{1}{2}((x_{11} + x_{22})^2 - (x_{11} - x_{22})^2 + (x_{21} - x_{12})^2 - (x_{21} + x_{12})^2).$$

Сигнатура (2,2).

Задача 5. Определите биективное соответствие между максимальными идеалами в кольце $\mathbb{R}[x]$ и точками верхней полуплоскости.

Решение: $\mathbb{R}[x]$ — кольцо главных идеалов, значит, всякий идеал порождается одним многочленом. Для того, чтобы идеал был максимальным, он должен порождаться многочленом неприводимым над $\mathbb{R}[x]$, а значит по основной теореме алгебры иметь степень ≤ 2. Будем рассматривать приведенные неприводимые многочлены в кольце $\mathbb{R}[x]$. Они порождаются многочленами первой степени вида $x - c$, которым мы сопоставим точку $(c, 0)$ и неприводимыми многочленами второй степени, которым можно сопоставить пару комплексных корней $a \pm bi$ и точку (a, b) в верхней полуплоскости.