Алгебра II, осенний семестр 2014г.

Решения домашнего задания 2.

М.Матушко и А.Трофимова

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Является ли симметрическим многочлен $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$ от трех переменных? Если да, найдите его представление через элементарные симметрические функции.

Решение: Да, является. Найдём представление методом неопределённых коэффициентов:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3 = as_1^3+bs_1s_2+cs_3$$

(по соображениям степени никакие другие мономы от s_1, s_2, s_3 войти не могут). Подставляя вместо (x_1,x_2,x_3) тройки $(1,0,0)$, $(0,1,-1)$ и $(1,1,1)$ находим, что $a=1$, $b=-3$, $c=0$, то есть ответ $s_1^3-3s_1s_2$. В частности, $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$ делится на $x_1+x_2+x_3$.

Задача 2. Выразите дискриминант многочлена

$$ax^4+bx^2+c$$

через a,b,c.

Решение: По формуле дискриминанта получаем

$$D = a^6((x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4))^2,$$

где x_1,x_2,x_3,x_4 - корни многочлена. Пусть $y=x^2$. Тогда $y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Подставляя в формулу и упрощая, мы получаем ответ $D=16ac(b^2-4ac)^2$.

Задача 3. Пусть $\mathbb{F}\subset\mathbb{C}$ - минимальное подполе, содержащее все корни многочлена x^3-3x+1. Найдите размерность поля $\mathbb{F}$ как векторного пространства над $\mathbb{Q}$.

Решение: Прямой проверкой убеждаемся, что многочлен $f=x^3-3x+1$ не имеет ни целых, ни рациональных корней, поэтому неприводим. Рассмотрим расширение $\mathbb{Q}[x_1]$, где x_1 - корень многочлена f. Поле $\mathbb{Q}[x_1]$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$ имеет размерность три, так как порождается векторами $1,x_1,x_1^2$, которые линейно независимы, поскольку x_1 не является корнем никакого многочлена степени меньше, чем 3 (в силу неприводимости многочлена f). Покажем, что поле $\mathbb{Q}[x_1]$ содержит и два других корня многочлена f. Обозначим их через x_2 и x_3. Дискриминант $D(f)=-27-4(-3)^3=81$. Следовательно,

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)=\pm 9$$

и $(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)\in\mathbb{Q}[x_1]$. По формулам Виета:

$$x_1x_2x_3=1\to x_2x_3=x_1^{-1}\in\mathbb{Q}[x_1]$$

$$x_1+x_2+x_3=0\to x_2+x_3\in\mathbb{Q}[x_1].$$

Значит, $(x_1-x_2)(x_1-x_3)=x_1^2-(x_2+x_3)x_1+x_2x_3\in\mathbb{Q}[x_1]$, откуда $(x_2-x_3)=\pm 9[(x_1-x_2)(x_1-x_3)]^{-1}\in\mathbb{Q}[x_1]$. Но тогда и сумма, и разность корней x_2 и x_3 одновременно принадлежат $\mathbb{Q}[x_1]$, а значит, они сами тоже.

Задача 4. Будем рассматривать пространство $S_{n,\le d}$ однородных симметрических многочленов степени не выше d от n переменных с коэффициентами в поле K. Постройте базис в $S_{n,\le d}$

Решение: Выберем в качестве базиса всевозможные многочлены $e_1^{\alpha_1} \dots e_n^{\alpha_n}, \sum i\alpha_i \leq d$, где e_i - элементарные симметрические функции. По основной теореме о симметрических многочленах всякий симметрический многочлен степени не выше d можно единственным образом представить как многочлен от элементарных симметрических функций, то есть как линейную комбинацию мономов от $e_1, \dots, e_n$ степени не выше d.

Задача 5. Обозначим через S идеал в кольце многочленов $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, порожденный всеми однородными симметрическими многочленами ненулевой степени. Докажите, что $x_i^n \in S$ для любого $i = 1, \dots, n$.

Решение: Рассмотрим многочлен $P(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$. Так как $0 = P(x_i) = x_i^n + \sum_1^n (-1)^i s_i x_i^{n-i}$, то $x_i^n = -\sum_1^n (-1)^i s_i x_i^{n-i} \in S$.