Алгебра II, осенний семестр 2014 г.

Задачи для семинара 3.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Найдите сумму чисел, обратных комплексным корням многочлена $x^4 - x^2 - x - 1$.

(б) Сумма двух корней многочлена $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ равна 1. Найдите λ.

Задача 2. (а) Вычислите результант многочленов $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ и $2x^2 - x - 1$.

(б) Для каких простых чисел p многочлены $2x^3 - 3x^2 - x + 2$ и $x^4 - 2x^2 - 3x + 4$ имеют общий корень в поле $\mathbb{F}_p$ из p элементов?

(в) Исключите x из системы уравнений $x^2 - xy + y^2 = 3$, $x^2y + xy^2 = 6$.

Задача 3. Для какого наименьшего натурального числа n существуют такие многочлены $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, что в кольце многочленов $\mathbb{Z}[x]$ выполнено тождество

$$(x^3 + x + 3)f(x) + (2x^2 + 1)g(x) = n?$$

Задача 4. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — корни многочлена

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Докажите, что любой симметрический многочлен от $x_2, \ldots, x_n$ можно представить в виде многочлена от x_1.

Задача 5. Рассмотрим многочлен $F_t = (1 + x_1 t) \cdots (1 + x_n t)$ от переменных $x_1, \ldots, x_n, t$. Проверьте, что коэффициенты многочлена F_t совпадают с элементарными симметрическими функциями $e_i(x_1, \ldots, x_n)$ для $i = 1, \ldots, n$.

(а) Определим $p_k(x_1, \ldots, x_n) = x_1^k + \ldots + x_n^k$. Докажите, что

$$\frac{d}{dt}(\ln F_t) = -\sum_{k>0} (-1)^k p_k(x_1, \ldots, x_n) t^k.$$

(б) Докажите тождества Ньютона:

$$k e_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i}(x_1, \ldots, x_n) p_i(x_1, \ldots, x_n)$$

(мы полагаем $e_0 = 1$, и $e_k = 0$ при $k > n$).

(в) Определим $h_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_i \le n} x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_i}$, и $h_0 = 1$. Докажите, что

$$F_t^{-1} = \sum_{k \ge 0} (-1)^k h_k(x_1, \ldots, x_n) t^k$$

(г) Докажите тождество

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i e_i(x_1, \ldots, x_n) h_{k-i}(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Problem 1. (a) Find the sum of the reciprocals of the roots for the polynomial $x^4 - x^2 - x - 1$.

(b) The sum of two roots of the polynomial $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ is equal to 1. Find λ.

Problem 2. (a) Compute the resultant of the polynomials $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ and $2x^2 - x - 1$.

(b) Find all prime p such that the polynomials $2x^3 - 3x^2 - x + 2$ and $x^4 - 2x^2 - 3x + 4$ have a common root in the field $\mathbb{F}_p$ of p elements.

(c) Eliminate x from the system of equations $x^2 - xy + y^2 = 3$, $x^2y + xy^2 = 6$.

Problem 3. Find the minimal positive integer n such that there exist polynomials $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ satisfying the following identity in the ring $\mathbb{Z}[x]$:

$$(x^3 + x + 3)f(x) + (2x^2 + 1)g(x) = n.$$

Problem 4. Let $x_1, \ldots, x_n$ be the roots of the polynomial

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Prove that every symmetric polynomial in $x_2, \ldots, x_n$ can be represented as a polynomial in x_1.

Problem 5. Consider the polynomial $F_t = (1 + x_1 t) \cdots (1 + x_n t)$ in variables $x_1, \ldots, x_n$, t. Check that the coefficients of F_t coincide with elementary symmetric functions $e_i(x_1, \ldots, x_n)$ for $i = 1, \ldots, n$.

(a) Define $p_k(x_1, \ldots, x_n) = x_1^k + \ldots + x_n^k$. Prove that

$$\frac{d}{dt}(\ln F_t) = -\sum_{k>0} (-1)^k p_k(x_1, \ldots, x_n) t^k.$$

(b) Prove Newton's identity:

$$k e_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i}(x_1, \ldots, x_n) p_i(x_1, \ldots, x_n)$$

(we put $e_0 = 1$, and $e_k = 0$ for $k > n$).

(c) Define $h_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_i \le n} x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_i}$. Show that

$$F_t^{-1} = \sum_{k \ge 0} (-1)^k h_k(x_1, \ldots, x_n) t^k$$

(d) Verify the identity

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i e_i(x_1, \ldots, x_n) h_{k-i}(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$