Алгебра II, осенний семестр 2014 г.

Задачи для семинара 5.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1 (Критерий Шёнеманна)**.** (а) Многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ имеет вид

$$f(x) = (x-a)^n + pF(x)$$

для некоторых $a, p \in \mathbb{Z}$, где $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$ — многочлен степени не выше n, а p — простое. Докажите, что если $F(a) \neq 0 \pmod p$, то $f(x)$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

(б) Выведите критерий Эйзенштейна из критерия Шёнеманна.

(в) Неприводим ли в $\mathbb{Z}[x]$ многочлен

$$x^5 - 2x^4 + 13x^3 - 7x^2 + 8x + 2?$$

(г) Приведите контрпример к критерию Шёнеманна, если не требовать $\deg(F) \leq n$.

Задача 2. (а) Сформулируйте критерий Шёнеманна–Эйзенштейна для кольца многочленов $R[x]$, где R — произвольная область целостности.

(б) Неприводим ли в $\mathbb{C}[x, y]$ многочлен

$$x^3y^2 + x^4 + 4x^3y + 4x^3 + y + 2?$$

Задача 3. Какие из следующих колец (а) евклидовы (б) факториальны?

(1) $\mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{3}}]$; (2) $\mathbb{R}[x, y]$; (3) $\mathbb{Z}[x]$; (4) $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$; (5) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

Задача 4. Пусть d — целое число, не являющееся полным квадратом. Назовём элемент $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ *целым алгебраическим числом*, если α является корнем многочлена $x^2 + px + q$ для некоторых $p, q \in \mathbb{Z}$.

(а) Докажите, что все целые алгебраические элементы поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ образуют кольцо (оно называется *кольцом целых* квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$).

(б) Докажите, что при $d = -1$ кольцо целых совпадает с кольцом $\mathbb{Z}[i]$ целых чисел Гаусса, а при $d = -3$ совпадает с кольцом $\mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{3}}]$ целых чисел Эйзенштейна.

(в) Найдите кольцо целых квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ для произвольного d.

Задача 5. Докажите, что при $d = 1$, 2, 3, 7, 11 кольцо целых квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ будет евклидовым относительно нормы $N(a + b\sqrt{d}) = a^2 + db^2$.

Problem 1 (Schönemann criterion)**.** (a) A polynomial $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ can be written as

$$f(x) = (x-a)^n + pF(x)$$

for some $a, p \in \mathbb{Z}$, where $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$ is a polynomial of degree at most n, and p is prime. Prove that if $F(a) \neq 0 \pmod{p}$, then $f(x)$ is irreducible in $\mathbb{Z}[x]$.

(b) Deduce the Eisenstein criterion from the Schönemann criterion.

(c) Is the following polynomial irreducible in $\mathbb{Z}[x]$

$$x^5 - 2x^4 + 13x^3 - 7x^2 + 8x + 2?$$

(d) Give a counterexample to the Schönemann criterion when the condition $\deg(F) \leq n$ is omitted.

Problem 2. (a) Formulate the Eisenstein–Schönemann criterion for the ring $R[x]$, where R is an arbitrary integral domain.

(b) Is the following polynomial irreducible in $\mathbb{C}[x, y]$

$$x^3y^2 + x^4 + 4x^3y + 4x^3 + y + 2?$$

Problem 3. Which of the following rings are (a) Euclidean (b) Unique Factorization Domains?

(1) $\mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{3}}]$; (2) $\mathbb{R}[x, y]$; (3) $\mathbb{Z}[x]$; (4) $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$; (5) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

Problem 4. Let d be a square free integer. An element $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ is called *algebraic integer* if α is a root of $x^2 + px + q$ for some $p, q \in \mathbb{Z}$.

(a) Prove that all algebraic integers in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ form a ring (it is called the *ring of integers* of the quadratic number field $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$).

(b) Prove that if $d = -1$ the the ring of integers coincide with the ring $\mathbb{Z}[i]$ of Gaussian integers, and if $d = -3$ then it coincides with the ring $\mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{3}}]$ of the Eisenstein integers (also known as Eulerian integers).

(c) Find the ring of integers of $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ for all d.

Problem 5. Show that if $d = 1, 2, 3, 7, 11$ then the ring of integers of $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ is Euclidean with respect to the norm $N(a + b\sqrt{d}) = a^2 + db^2$.