

Темы студенческих работ

Г. И. Ольшанский

Предлагаемые темы предназначены для бакалавров и магистрантов. Я не привожу разбивку по курсам, поскольку каждая из тем допускает различные уровни погружения и соответственно различные степени подготовки. На начальном уровне можно ограничиться изучением классических теорем, которые обычно не входят в обязательные курсы, но которые полезно знать математику любой специальности. Далее можно читать и реферировать журнальные статьи, вплоть до современных публикаций. Наконец, рвущиеся решать задачи найдут материал для самостоятельных изысканий.

1 Сюжеты из алгебраической комбинаторики

Симметрические функции, алгоритм Робинсона-Шенстеда-Кнута, метод Гесселя-Вьенно, алгоритм Литтлвуда-Ричардсона, правило Мурнагана-Накаяма, формулы Литтлвуда, квазисимметрические функции и многое, многое другое.

Литература: Макдональд, Симметрические функции и многочлены Холла. Стенли, Перечислительная комбинаторика. Фултон, Таблицы Юнга. Sagan, The symmetric group. Журнальные статьи.

2 Представления симметрических групп

Теория представлений началась с работ Фробениуса. Его главный результат — классификация неприводимых представлений конечных симметрических групп — поразителен по глубине и нетривиальности. В книжке Макдональда доказательство Фробениуса занимает всего несколько

страничек, но изложение сжатое. Очень полезно разобрать его во всех деталях; попутно студент узнает много интересного. Есть и другие доказательства; каждое из них имеет свои достоинства. Ввиду исключительной важности представлений симметрических групп для всей математики интересно изучить различные подходы.

Одно из возможных дальнейших направлений — проективные представления симметрических групп. Когда-то Максим Леонидович Назаров (<http://maths.york.ac.uk/www/mln1>), будучи студентом мехмата, сделал замечательную работу об аналоге ортогональной формы Юнга для проективных представлений симметрических групп, что послужило трамплином для его карьеры.

Литература: Винберг, Линейные представления групп (прекрасное руководство для начального ознакомления с теорией представлений). Книги Макдональда, Стенли, Фултона, Сагана, указанные выше. Кириллов, Элементы теории представлений. Оригинальная статья Вершика и Окунькова, работы Назарова и многие другие журнальные статьи.

3 Интеграл Сельберга

Интеграл Сельберга является нетривиальным многомерным обобщением бета-интеграла Эйлера. Для интеграла Сельберга есть замечательно красивая формула. Она может быть получена разными способами, которые имеет смысл изучить. После этого открывается путь ко многим обобщениям и конкретным применениям: интеграл Сельберга эффективно работает во многих областях. В частности, в теории симметрических функций.

4 Теорема де Финетти

Эта теорема — одна из жемчужин теории вероятностей. В своем простейшем варианте она описывает случайные двоичные последовательности с некоторым свойством симметрии (exchangeability). Уже эта версия имеет замечательные связи с другими объектами и разделами математики: граф Паскаля, проблема моментов Хаусдорфа, многочлены Бернштейна. Далее, теорема де Финетти. верна в гораздо более широком контексте. Недавно была обнаружена q -версия теоремы де Финетти. Есть также

другое обобщение — т.н. квантовая версия (тут нужно кое-что знать про операторные алгебры).

Литература: Феллер, Введение в теорию вероятностей. Журнальные статьи.

5 Ортогональные многочлены и проблема моментов

Ортогональные многочлены возникают повсюду, так что знакомство с ними полезно для всех математиков.

Начальное изучение доступно младшекурсникам: достаточно владеть основами матанализа и линейной алгебры. Для более углубленного ознакомления с предметом нужны сведения из функционального анализа (операторы в гильбертовом пространстве). Кстати, проблема моментов — один из возможных способов вхождения в область функционального анализа.

Возможные сюжеты для продвинутых студентов связаны с применением ортогональных многочленов к вероятностным задачам.

Литература: Суетин, Классические ортогональные многочлены. Chihara, An introduction to orthogonal polynomials. Ахиезер, Классическая проблема моментов. Многочисленные журнальные статьи (от старых работ Карлина и МакГрегора до современных публикаций).

6 Винтовые линии в гильбертовом пространстве

Исключительно интересно читать оригинальные работы классиков. Предлагаемый сюжет основан на статьях Колмогорова и фон Неймана – Шёнберга. Вкратце, речь идет о геометрической интерпретации винеровского процесса.

Предварительная подготовка: основы теории вероятностей, основы функционального анализа.

Литература: Колмогоров, заметки в ДАН, 1940. Von Neumann and Schoenberg, Trans. AMS, 1941.

У меня также есть рукописные заметки.

7 Инвариантные положительно определенные ядра

Этот сюжет идейно связан с предыдущим. Шёнберг — один из моих любимых классиков — в 30-40-е годы интересовался изометрическими погружениями однородных метрических пространств в гильбертово пространство. Причем особенно интересные результаты получаются для бесконечномерных метрических пространств (например, бесконечномерной сферы). Случай бесконечномерного пространства Лобачевского рассматривал Крейн. Результат Крейна не был опубликован в подробном изложении, но его можно найти у других авторов. Работы Шёнберга и Крейна предвосхитили теорию унитарных представлений бесконечномерных групп, возникшую много позднее. Ни Шёнберг, ни Крейн ничего не говорили о представлениях, но таково свойство подлинно хороших работ — со временем в них открываются такие черты, о которых сами авторы могли не подозревать.

Изучение теорем Шёнберга и Крейна — один из возможных путей вхождения в теорию унитарных представлений бесконечномерных групп.

Предварительная подготовка: основы функционального анализа.

8 Случайное поле Леви

Фундаментальный пример марковского процесса с непрерывным временем — это винеровский процесс, или броуновское движение. У него есть два принципиально разных обобщения: когда пространство становится многомерным (или даже бесконечномерным) и когда таковым становится “время”. Случайное поле Леви (названное так в честь его первооткрывателя Поля Леви), относится ко второму типу. Это замечательный объект, который приобретает парадоксальные свойства в бесконечномерной ситуации.

Предварительная подготовка: основы теории вероятностей, основы функционального анализа.

Литература: Леви, Стохастические процессы и броуновское движение. Статьи Ченцова и Картье.

9 Характеры классических групп

Всем, кто хочет заниматься теорией представлений или применять ее в других областях математики, необходимо знать характеры конечномерных представлений. Это основа основ. Важно освоить и единообразный подход к произвольным простым группам Ли, основанный на их структурной теории, и альтернативный подход, фокусирующийся на классических группах и использующий их специфику. Классические группы выстраиваются в бесконечные серии; отсюда — мостик к бесконечномерным группам. Теория конечномерных характеров излагается во многих руководствах. Я особенно люблю книгу Желобенко, Компактные группы Ли и их представления, но ее необходимо дополнять другими источниками. После чтения (относительно) современных книг полезно проверить себя, обратившись к книге Германа Вейля, Классические группы, их инварианты и представления. Она имеет репутацию “великой и ужасной”. Ужасной — поскольку изложение считается тяжелым. Великой — поскольку была исторической первой и написана отцом-основателем. Изучение книги Вейля (хотя бы и неполное) окупится — в ней есть много такого, чего нет в позднейших учебниках.

10 Двойственность Шура-Вейля и обобщения. Представление Вейля

Двойственность Шура-Вейля говорит о связи между представлениями симметрических и унитарных групп, реализующихся в тензорах. В таком виде она изложена во многих руководствах. У нее есть обобщения в различных направлениях. Например, вместо унитарной группы можно брать другие классические группы или же рассматривать пространство смешанных тензоров. Это приводит к замене симметрической группы на алгебру Брауэра. Другие обобщения связаны с q -аналогами, с янгианами, с супералгебрами Ли, с бесконечномерными представлениями (двойственность Хау). Последняя использует представление Вейля — отдельный большой сюжет. Огромный материал для желающих изучать теорию представлений.