Темы возможных курсовых и дипломных работ под руководством проф. А.А.Глуцюка*

2 октября 2014 г.

1 Вокруг гипотезы В.Я.Иврия о бильярдах

В 1978 г. В.Я.Иврий сформулировал гипотезу, утверждающую, что во всяком бильярде с (криволинейной) гладкой границей в евклидовом пространстве множество периодических орбит имеет меру нуль. Или, что то же самое, множество периодических пар (точка, направление) имеет меру нуль. Он показал, [6], что из этой гипотезы следует гипотеза Германа Вейля (1911 г. [8]) об асимптотике распределения собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа. Гипотеза Иврия решена лишь в очень частных случаях, например, для треугольных орбит в любой размерности (М.Рыхлик, Л.Стоянов, Я.Б.Воробец и др.) и четырехугольных орбит в размерности два [3] (см. там же более полный обзор и библиографию). Главный частный случай гипотезы Иврия относится к бильярдам с кусочно-аналитической границей. Для них она эквивалентна утверждению о том, что множество периодических орбит каждого периода имеет пустую внутренность. Гипотеза открыта даже для случая кусочно-алгебраической границы. Она доказана для полиэдральных бильярдов (напр. многоугольников на плоскости) и кусочно-гладких бильярдов с "вогнутыми стенками"(Д.Г.Васильев).

Гипотеза Иврия имеет аналог в теории невидимости. Рассмотрим идеально отражающее (не обязательно связное) тело с кусочно-гладкой границей в евклидовом пространстве и ориентированные прямые, идущие к телу из бесконечности. Тело называется *невидимым в направлении* заданной ориентированной прямой L, если прямая отражается от тела конечное число раз и уходит на бесконечность в исходном направлении, в точности вдоль прямой L и с той же ориентацией.

А.Ю.Плахов высказал гипотезу [7, гипотеза 8.2], утверждающую, что никакое тело не является невидимым по множеству направлений, имеющему положительную меру Лебега. Для кусочно-аналитического случая гипотеза Плахова, как и гипотеза Иврия, эквивалентна утверждению о том, что множество направлений невидимости с данным числом отражений имеет пустую внутренность. Обзор по теории невидимости представлен в той же книге, включая результаты о невидимости в конечном числе направлений и по всем направлениям.

---

*А.А.Глуцюк планирует быть в ВШЭ во втором семестре, начиная с середины января 2014 г. Готов обсуждать предмет курсовой со всеми, кто заинтересуется, как до, так и после приезда в ВШЭ, как лично, так и по e-mail: aglutsyu@ens-lyon.fr. А также, по Skype

Задача 1. Проверить гипотезу Иврия (Плахова) для плоских бильярдов (тел), граница которых есть объединение

а) гладких коник: эллипсов, гипербол, парабол;

б) прямых и коник.

.Задача 2. Проверить аналог гипотезы Иврия (Плахова) для треугольных орбит (трех отражений)

а) на плоскости Лобачевского;

б) в гиперболическом пространстве высшей размерности.

Отдельно рассмотреть случай многоугольников, соответственно, полиэдров.

Следующая задача также является аналогом гипотезы Иврия для четырехугольных орбит.

Задача 3 (С.Л.Табачников). Рассмотрим две бесконечно-гладкие выпуклые замкнутые кривые на плоскости, одна во внутренней области другой. Каждая из них задает бильярдное преобразование, действующее на пространстве ориентированных прямых, пересекающих кривую: отражение от кривой в последней точке пересечения прямой с кривой; ориентирующий вектор отраженной прямой в точке отражения направлен внутрь области. Предположим, что бильярдные преобразования, отвечающие двум кривым, коммутируют там, где их композиции определены. Доказать, что рассматриваемые кривые являются софокусными эллипсами.

Замечание. В случае кусочно-аналитических кривых утверждение задачи 3 доказано в статье [2]. В статье [3], разделе 2 имеются рассуждения, позволяющие свести общий гладкий случай к кусочно-аналитическому. Все вместе это дает весьма длинное (больше 60 стр.) доказательство утверждения задачи 3, существенно использующее комплексные методы. Было бы интересно получить новое, прямое и короткое доказательство.

Задача 4 (С.Л.Табачников). Доказать, что всякая компактная область на плоскости с гладкой границей имеет либо 2- либо 3- периодическую бильярдную орбиту (или обе). Это утверждение следует из глубокой теоремы Benci и Giannoni, доказательство которой использует продвинутую симплектическую геометрию. Было бы интересно получить прямое геометрическое доказательство.

2 Проблема исключительных минимальных множеств для ростков голоморфных векторных полей

Одна из основных проблем теории голоморфных слоений - это классическая проблема исключительных минимальных множеств, поставленная С.Камачо (C.Camacho), Эта проблема состоит в следующем. Рассмотрим полиномиальное векторное поле в $\mathbb{C}^2$ и его комплексный фазовый портрет: голоморфное слоение на аналитические кривые (комплексные фазовые кривые поля) с особенностями. Оно продолжается до *голоморфного слоения на аналитические кривые* (комплексные листы) с изолированными особенностями в $\mathbb{CP}^2$. И обратно, всякое голоморфное слоение с изолированными особенностями на аналитические кривые в $\mathbb{CP}^2$ в каждой аффинной карте является фазовым портретом полиномиального векторного поля.

Проблема 5. Верно ли, что всякий лист произвольного голоморфного слоения с изолированными особенностями на аналитические кривые в $\mathbb{CP}^2$ накапливается хотя бы к одной особой точке?

Определение. *Инвариантным множеством* слоения называется объединение некоторых его листов (оно может содержать особые точки). Замкнутое инвариантное множество называется *минимальным,* если оно не содержит меньших замкнутых инвариантных множеств.

Следующая проблема эквивалентна Проблеме 5.

Проблема 6. Верно ли, что всякое минимальное множество голоморфного слоения с изолированными особенностями на аналитические кривые в $\mathbb{CP}^2$ содержит особую точку?

Это - открытые проблемы, возраста нескольких десятилетий.

Замечание. В проблемах 5 и 6 важно, что объемлющее многообразие - проективная плоскость. В общем случае, утверждение неверно. Контрпример: тривиальное расслоение прямого произведения двух римановых поверхностей. В этом случае особых точек нет, и каждый слой является минимальным множеством.

Рассматриваемый ниже проект курсовой (дипломной) работы относится к локальной версии вышеупомянутых проблем. Чтобы ее сформулировать, введем следующее определение.

Определение. Рассмотрим росток голоморфного векторного поля v в $\mathbb{C}^n$ с (изолированной) особой точкой в начале координат. Фиксируем окрестность нуля U и рассмотрим комплексный фазовый портрет поля в U: слоение на связные аналитические кривые в U с изолированной особой точкой 0. Определение минимального множества фазового портрета в U аналогично предыдущему, где $U = \mathbb{CP}^2$. А именно, инвариантное множество - это объединение комплексных фазовых кривых в U (оно может содержать особую точку); фазовые кривые могут примыкать к границе области U. Минимальное замкнутое инвариантное множество называется *исключительным,* если оно не содержит особой точки и не является одномерным аналитическим подмножеством в U.

Проблема 7. Верно ли, что ограничение голоморфного векторного поля с изолированной особой точкой на любую достаточно малую окрестность особой точки не имеет исключительных минимальных множеств?

Проблема 7 представляется более доступной, чем проблемы 5 и 6, и тесно связана с уже решенной проблемой существования сепаратрисы в особой точке голоморфного векторного поля. Известно, что сепаратриса, проходящая через особую точку, всегда существует в размерности два [1] и не обязана существовать в высших размерностях [4].

Следующая задача представляется упражнением. В то же время, насколько мне известно, этот результат не опубликован.

Задача 8. Доказать, что проблема 7 имеет положительное решение в размерности два.

После того, как решена задача 8, можно попробовать следующую задачу.

Задача-проблема 9. Рассмотреть примеры Гомес-Монта и Лоэнги [4] ростков трехмерных голоморфных векторных полей без сепаратрис в особой точке. Исследовать существование исключительных минимальных множеств, т.е. проблему 5 для этих примеров.

Подготовительный материал см. в книге Yu.S.Ilyashenko, S.Yu.Yakovenko [5]. Или в книге В.И.Арнольда "Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений". Или обзор Арнольда и Ильяшенко в книге ВИНИТИ "Динамические Системы - 1". Одна из главных теорем подготовительного материала, которые следует изучить - теорема Зайденберга о разрешении особенностей ростков двумерных голоморфных векторных полей последовательностью раздутий. При этом получается новое векторное поле, у которого все особые точки - элементарны.

Список литературы

[1] Camacho, C.; Sad, P. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. - Ann. Math. 115 (1982), 579–595.

[2] Glutsyuk, A. On 4-reflective complex analytic planar billiards. - Preprint http://arxiv.org/abs/1405.5990

[3] Glutsyuk, A.A.; Kudryashov, Yu.G., *No planar billiard possesses an open set of quadrilateral trajectories,* J. Modern Dynamics, **6** (2012), No. 3, 287–326.

[4] Gomez-Mont, X.; Luengo, I. Germs of holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^3$ without a separatrix. - Invent. Math. 109 (1992), 211–219.

[5] Ilyashenko, Yu.S.; Yakovenko, S.Yu. Lectures on analytic differential equations. - Graduate Studies in Mathematics 86, AMS, Providence, RI 2008.

[6] Ivrii, V.Ya., *The second term of the spectral asymptotics for a laplace-beltrami operator on manifolds with boundary*, Func. Anal. Appl. **14 (2)** (1980), 98–106.

[7] Plakhov, A. *Exterior billiards. Systems with impacts outside bounded domains,* Springer, New York, 2012.

[8] Weyl, H., *Über die asymptotische verteilung der eigenwerte*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1911), 110–117.