Алгебра II, осенний семестр 2014 г.

Листок 1. Срок сдачи 8 октября.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать устно. Каждый пункт каждой задачи оценивается в один балл.

Задача 1. Выразите через p и q дискриминант многочлена
$$x^n + px + q.$$

Задача 2. Пусть A — линейный оператор на n-мерном комплексном векторном пространстве, такой что все его собственные числа по модулю меньше единицы. Докажите, что для A выполнено тождество
$$\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{tr}\Lambda^i A\right)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}\operatorname{tr} S^i A.$$

Задача 3. Обозначим элементарные симметрические функции через
$$e_i(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\le k_1<k_2<\ldots<k_i\le n} x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_i}, \quad i=1,\ldots,n,$$
и положим $e_0 = 1$, и $e_k = 0$ при $k > n$. Определим $p_k(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^k$, и
$$h_i(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\le k_1\le k_2\le\ldots\le k_i\le n} x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_i}.$$

Докажите тождества

(а) $ke_k(x_1,\ldots,x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}e_{k-i}(x_1,\ldots,x_n)p_i(x_1,\ldots,x_n)$ (тождество Ньютона),

(б) $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^i e_i(x_1,\ldots,x_n)h_{k-i}(x_1,\ldots,x_n) = 0.$

Задача 4. *Круговым многочленом* Φ_m называется многочлен
$$\Phi_m = \prod_{(k,m)=1}(x-\eta^k),$$
где $\eta = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ — первообразный корень степени m из единицы. Найдите для всех натуральных m и n

(а) результант круговых многочленов Φ_m и Φ_n;

(б) дискриминант кругового многочлена Φ_m.

Задача 5 (Многочлены Шура)**.** Пусть $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n)$ — невозрастающий набор неотрицательных целых чисел. Определим *многочлен Шура* $S_\mu(x_1,\ldots,x_n)$ как частное $\frac{\Delta_{\mu+\delta}}{\Delta_\delta}$, где Δ_μ обозначает определитель
$$\begin{pmatrix} x_1^{\mu_1} & \ldots & x_n^{\mu_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{\mu_n} & \ldots & x_n^{\mu_n}\end{pmatrix},$$
а $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$. Докажите, что

(а) $S_\mu(x_1,\ldots,x_n)$ — симметрический многочлен с целыми коэффициентами;

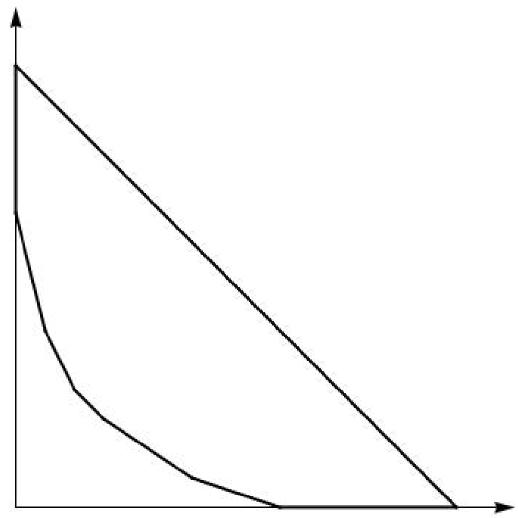

Рис. 1. К задаче 7

(б) $S_\mu(x_1, \ldots, x_n)$ при всех μ образуют базис пространства симметрических многочленов от $x_1, \ldots, x_n$;

(в) если $\mu = (1, \ldots, 1)$, то $S_\mu(x_1, \ldots, x_n) = e_n(x_1, \ldots, x_n)$;

(г) если $\mu = (n, 0, \ldots, 0)$, то $S_\mu(x_1, \ldots, x_n) = h_n(x_1, \ldots, x_n)$.

Задача 6 (Ряды Пюизо)**.** Пусть K — поле. Определим *ряд Пюизо* с коэффициентами в K как формальный ряд Лорана $\sum_{i=k}^{\infty} a_i t^i$ от $t = x^{\frac{1}{m}}$, где m и k могут быть произвольным натуральным и целым числом, соответственно, а $a_i \in K$. Докажите, что

(а) ряды Пюизо образуют поле;

(б) если $\operatorname{char} K = 0$, и K алгебраически замкнуто, то поле рядов Пюизо является алгебраическим замыканием поля рядов Лорана.

(в) Будет ли поле рядов Пюизо алгебраически замкнутым, если $\operatorname{char} K \neq 0$?

(г) Как выглядит кривая $\{y^4 + x^3 - 4xy^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ в достаточно маленькой окрестности начала координат?

Задача 7 (Теорема Миндинга)**.** Пусть $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ — многочлены с многоугольниками Ньютона P и Q, соответственно. Предположим, что для некоторых $d_1 < \deg f$ и $d_2 < \deg g$ многоугольники P и Q содержат все точки (k, l) с целыми неотрицательными координатами, такие что $d_1 \leq k + l \leq \deg f$ и $d_1 \leq k + l \leq \deg g$, соответственно (то есть, достаточно далеко от начала координат оба многоугольника выглядят как многоугольники Ньютона многочленов общего положения, см. рисунок).

(а) Рассмотрим $g(x, y) = g_n(x)y^n + \ldots + g_0(x)$ как многочлен от y с коэффициентами в $\mathbb{C}[x]$. Докажите, что в поле рядов Пюизо от x с комплексными коэффициентами многочлен $g(y)$ имеет только корни вида $a_\mu x^\mu + o(x^\mu)$, где μ равно тангенсу угла наклона нормали, проведённой к одному из рёбер многоугольника Q.

(б) Докажите, что число ненулевых решений системы $f(x, y) = g(x, y) = 0$ не превышает $\operatorname{area}(P + Q) - \operatorname{area}(P) - \operatorname{area}(Q)$ (то есть удвоенной *смешанной площади* многоугольников P и Q).