Алгебра II, осенний семестр 2014 г.

Задачи для семинара 6.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Пусть R — область целостности. Определим отношение $\sim$ на парах элементов из $R \setminus \{0\}$ по правилу: $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad - bc = 0$. Проверьте, что $\sim$ является отношением эквивалентности.

(б) Опишите поле частных кольца многочленов $\mathbb{Z}[x]$.

(в) Пусть F — поле. Определим кольцо формальных рядов Лорана

$$F((x)) = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in F,\ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Докажите, что $F((x))$ является полем частных кольца формальных степенных рядов $F[[x]]$.

Задача 2. Пусть S — коммутативная полугруппа.

(а) Определим отношение $\sim$ на парах элементов из S по правилу: $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Является ли $\sim$ отношением эквивалентности?

(б) Определим отношение $\approx$ на парах элементов из S по правилу: $(a,b) \approx (c,d) \Leftrightarrow a+d+x = b+c+x$ для некоторого $x \in S$. Является ли $\approx$ отношением эквивалентности?

(в) Приведите пример бесконечно порождённой (под)полугруппы в $\mathbb{Z}^2$.

(г) Пусть S — полугруппа подмножеств в $\mathbb{R}^n$ относительно сложения по Минковскому. Верно ли, что из $a + c = b + c$ в S всегда следует, что $a = b$?

(д) Проверьте, что выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$ образуют полугруппу относительно сложения по Минковскому, и эта полугруппа обладает свойством сократимости.

Задача 3. (а) Пусть $d \in \mathbb{Z}$ свободно от квадратов. Докажите, что кольцо целых квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ не является евклидовым относительно нормы квадрат модуля при $d > 11$, и $d = 5, 10$.

(б) Докажите, что все идеалы в кольце целых квадратичного поля являются свободными абелевыми группами ранга 2 (относительно сложения).

(в) Нарисуйте какой-нибудь главный и неглавный идеалы в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ как решётки на комплексной плоскости.

(г) Докажите, что идеал $\mathcal{I}$ в кольце целых $\mathcal{O}_d$ мнимого ($d < 0$) квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ является главным тогда и только тогда, когда $\mathcal{I}$ и $\mathcal{O}_d$ подобны как решётки на комплексной плоскости.

(д) Найдите все единицы (=обратимые элементы) в кольце целых мнимого квадратичного поля.

Задача 4. Пусть $L \subset \mathbb{C}$ — решётка на комплексной плоскости с $\mathbb{Z}$-базисом $(u,\ v)$. При каких условиях на u и v

(а) решётка L содержится в кольце целых некоторого квадратичного поля?

(б) решётка L является идеалом в кольце целых некоторого квадратичного поля?

Задача 5. (а) Докажите, что сумма и произведение двух целых алгебраических чисел будут целыми алгебраическими.

(б) Пусть α — корень многочлена $x^3 + x + 1$, а β — корень многочлена $x^2 + 2$. Выпишите примитивный многочлен в $\mathbb{Z}[x]$, корнем которого является $\alpha + \beta$.

Problem 1. (a) Let R be an integral domain. Define the relation $\sim$ on the pairs of elements in $R \setminus \{0\}$ by the rule: $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad - bc = 0$. Check that $\sim$ is an equivalence relation.

(b) Describe the field of fractions of $\mathbb{Z}[x]$.

(c) Let F be a field. Define the ring of formal Laurent power series

$$F((x)) = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in F,\ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Prove that $F((x))$ is a field of fractions of $F[[x]]$.

Problem 2. Let S be a commutative group.

(a) Define the relation $\sim$ by the rule: $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c$. Is $\sim$ an equivalence relation?

(b) Define the relation $\approx$ by the rule: $(a,b) \approx (c,d) \Leftrightarrow a+d+x = b+c+x$ for some $x \in S$. Is $\approx$ an equivalence relation?

(c) Give an example of an infinetely generated semigroup in $\mathbb{Z}^2$.

(d) Let S be a semigroup of subsets in $\mathbb{R}^n$ with respect to Minkowski sum. Is it true that $a+c = b+c$ in S implies $a = b$?

(e) Prove that convex bodies in $\mathbb{R}^n$ form a semigroup with respect to Minkowski sum, and this semigroup is cancellative.

Problem 3. (a) Let d be a square free integer. Prove that the ring of integers of $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ is not Euclidean with respect to the norm absolute value squared if $d > 11$ and $d = 5, 10$.

(b) Prove that all ideals in the ring of integers of a quadratic field are free Abelian groups of rank 2.

(c) Draw a principal ideal and a non-principal one in the ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ as lattices in the complex plane.

(d) Prove that an ideal $\mathcal{I}$ in the ring of integers $\mathcal{O}_d$ of the imaginary quadratic field $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ is principal if and only if $\mathcal{I}$ and $\mathcal{O}_d$ are similar as lattices in the complex plane.

(e) Find all units in the ring of integers of an imaginary quadratic field.

Problem 4. Let $L \subset \mathbb{C}$ be a lattice with a $\mathbb{Z}$-basis $(u,\ v)$. Under which conditions on u and v

(a) the lattice L is contained in the ring of integers of some quadratic field?

(b) the lattice L is an ideal in the ring of integers of some quadratic field?

Problem 5. (a) Prove that the sum and product of two algebraic integers are also algebraic integers.

(b) Let α be a root of $x^3 + x + 1$, and β a root of $x^2 + 2$. Write down a primitive polynomial in $\mathbb{Z}[x]$, whose root is $\alpha + \beta$.