Алгебра II, осенний семестр 2014 г.

Задачи для семинара 7.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Пусть минимальная ненулевая длина вектора в двумерной решётке $L \subset \mathbb{C}$ равна r. Докажите, что для любого $a \in L$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ внутренность диска $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{a}{n}| \leq \frac{r}{n}\}$ не содержит никаких точек решётки L кроме (возможно) центра диска.

Задача 2. Найдите группу классов идеалов следующих колец целых:
(а) $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$; (б) $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$; (в) $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$; (г) $\mathbb{Z}[\sqrt{-21}]$ (д) $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-23}}{2}]$.

Задача 3. Разложите идеалы в произведение простых идеалов:
(а) $(3) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$; (б) $(3) \subset \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]$; (в) $(7) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$.

Задача 4. Пусть $\mathcal{O}$ — кольцо целых мнимого квадратичного поля.
(а) Докажите, что все простые идеалы в $\mathcal{O}$ максимальны.
(б) Докажите, что любой идеал в $\mathcal{O}$ порождён не более чем двумя элементами.
(в) Докажите, что для любого идеала $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}$ выполнено тождество

$$\mathcal{I}\overline{\mathcal{I}} = (n)$$

для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.
(г) Останется ли утверждение пункта (в) верным, если заменить $\mathcal{O}$ на произвольное мнимое квадратичное кольцо (например, на $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$)?

Задача 5. Через $\mathcal{O}_d$ обозначается кольцо целых мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.
(а) Докажите, что для идеала $(p) \subset \mathcal{O}_d$ верно ровно одно из следующих утверждений:

(1) (p) остаётся простым в $\mathcal{O}_d$;
(2) $(p) = \mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2$, где $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ различные простые идеалы в $\mathcal{O}_d$;
(3) $(p) = \mathcal{I}^2$, где $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_d$ — простой идеал.

(б) Докажите, что случай (3) реализуется тогда и только тогда, когда p делит *дискриминант* D кольца $\mathcal{O}_d$, который определяется по следующей формуле:

$$D = \begin{cases} -d, & -d \equiv 1 \pmod 4 \\ -4d, & -d \equiv 2,3 \pmod 4 \end{cases}$$

(в) Опишите факторкольцо $\mathcal{O}_d/(p)$ в каждом из трёх случаев пункта (а).

Problem 1. The minimal length of a nonzero vector in a two-dimensional lattice $L \subset \mathbb{C}$ is equal to r. For all $a \in L$ and all $n \in \mathbb{Z}$, prove that the interiour of the disk $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{a}{n}| \leq \frac{r}{n}\}$ does not contain any points of L except for (possibly) the center of the disk.

Problem 2. Find the ideal class group of the following integer rings:
(a) $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$; (b) $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$; (c) $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$; (d) $\mathbb{Z}[\sqrt{-21}]$ (e) $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-23}}{2}]$.

Problem 3. Decompose ideals into product of prime ideals:
(a) $(3) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$; (b) $(3) \subset \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]$; (c) $(7) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$.

Problem 4. Let $\mathcal{O}$ be an imaginary quadratic integer ring.
(a) Prove that all prime ideals in $\mathcal{O}$ are maximal.
(b) Prove that any ideal in $\mathcal{O}$ is generated by at most two elements.
(c) Prove that for any ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}$ the identity

$$\mathcal{I}\overline{\mathcal{I}} = (n)$$

holds for some $n \in \mathbb{Z}$.
(d) Does (c) remain true if $\mathcal{O}$ is replaced by an arbitrary imaginary quadratic ring (e.g., by $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$)?

Problem 5. Let $\mathcal{O}_d$ denote the ring of integers of the imaginary quadratic field $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.
(a) Prove that for every $(p) \subset \mathcal{O}_d$ exactly one of the following is true:
(1) (p) remains prime in $\mathcal{O}_d$;
(2) $(p) = \mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2$, where $\mathcal{I}_1$ and $\mathcal{I}_2$ are distnct prime ideals in $\mathcal{O}_d$;
(3) $(p) = \mathcal{I}^2$, where $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_d$ is a prime ideal.
(b) Prove that case (3) is realized if and only if p divides the *discriminant* D of $\mathcal{O}_d$, which is defined as follows:

$$D = \begin{cases} -d, & -d \equiv 1 \pmod 4 \\ -4d, & -d \equiv 2, 3 \pmod 4 \end{cases}$$

(c) Describe the qoutient ring $\mathcal{O}_d/(p)$ in all three cases of (a).