Алгебра II, осенний семестр 2014 г.

Листок 2. Срок сдачи 19 ноября.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать устно. Каждый пункт каждой задачи оценивается в один балл.

Задача 1. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — двумерная решётка. *Кообъём* решётки L определяется как площадь параллелелограмма, натянутого на какие-нибудь два вектора, порождающих решётку. Обозначим кообъём через $\Delta(L)$.

(а) Проверьте корректность определения кообъёма.

(б) Докажите, что если $K \subset L$ — подрешётка, то

$$|L/K| = \frac{\Delta(K)}{\Delta(L)}.$$

(в) Пусть δ — корень квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ с целыми коэффициентами и дискриминантом $D<0$. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}[\delta]$ как решётку в $\mathbb{C}$. Докажите, что

$$4\Delta^2(\mathbb{Z}[\delta]) = -D.$$

(г) Пусть $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z}[\delta]$ — идеал, такой что $\mathcal{I}\bar{\mathcal{I}} = (n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$\Delta(\mathcal{I}) = n.$$

Задача 2. Пусть $\mathcal{O}$ — кольцо целых мнимого квадратичного поля, а $\mathcal{I} \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ — идеалы. Докажите, что

(а) найдётся идеал $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$ такой, что $\mathcal{I}\mathcal{K} = \mathcal{J}$;

(б) если $\mathcal{I}\mathcal{K} = \mathcal{J}$, то

$$\Delta(\mathcal{K}) = \frac{\Delta(\mathcal{J})}{\Delta(\mathcal{I})}.$$

Задача 3. Пусть $\mathcal{O}$ — кольцо целых алгебраического расширения поля $\mathbb{Q}$ степени n.

(а) Докажите, что все ненулевые простые идеалы в $\mathcal{O}$ максимальны.

(б) Предположим, что для простого $p \in \mathbb{Z}$ главный идеал $(p) \subset \mathcal{O}$ раскладывается как $(p) = P_1^{k_1} \cdots P_l^{k_l}$, где $P_1,\ldots,\ P_l \subset \mathcal{O}$ — попарно различные простые идеалы. *Степенью* $\deg P_i$ идеала P_i называется размерность поля $\mathcal{O}/P_i$ как векторного пространства над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, а k_i называется *индексом ветвления*. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{l} k_i \deg P_i = n.$$

(в) Рассмотрим полиномиальное отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, переводящее x в $f(x)$, где $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ — многочлен степени n. *Индексом ветвления* $\operatorname{ord}_{x_0}(f)$ отображения f в точке $x_0 \in \mathbb{C}$ назовём кратность нуля многочлена $f(x) - f(x_0)$ в x_0. Пусть точка $a \in \mathbb{C}$ имеет l прообразов $x_1,\ldots,\ x_l$ при отображении f. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{l} \operatorname{ord}_{x_i}(f) = n.$$

Задача 4 (Лемма Минковского)**.** Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — двумерная решётка.

(а) Пусть $S \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое центрально симметричное подмножество. Докажите, что если

$$\operatorname{area}(S) > 4\Delta(L),$$

то решётка L содержит хотя бы одну точку множества S отличную от нуля.

(б) Докажите, что в L найдётся ненулевой вектор v, такой что

$$|v|^2 \leq \frac{4\Delta(L)}{\pi}.$$

Задача 5. Пусть $L \subset \mathbb{C}$ — двумерная решётка, а r — положительное вещественное число. Докажите, что внутренности кругов в $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{a}{n}| \leq \frac{r}{n}\}$, где $a \in L$, и $n \in \mathbb{Z}$ покрывают всю комплексную плоскость.

Задача 6. Докажите, что число классов идеалов в кольце целых мнимого квадратичного поля всегда конечно.

Задача 7. Найдите группу классов идеалов в кольцах

(а) $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$; (б) $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$; (в) $\mathbb{Z}[\sqrt{-21}]$; (г) $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-23}}{2}]$

Задача 8. Найдите все целые решения уравнения

$$y^2 + 13 = x^3.$$

Задача 9. Пусть $\mathcal{O}$ — кольцо целых вещественного квадратичного поля. Докажите, что в $\mathcal{O}$ бесконечно много обратимых элементов.

Задача 10. Пусть η — первообразный корень из единицы степени p, где $p \in \mathbb{Z}$ — простое.

(а) Найдите кольцо целых $\mathcal{O}$ кругового поля $\mathbb{Q}(\eta)$.

(б) Найдите разложение на простые идеалы главного идеала $(p) \subset \mathcal{O}$.

(в) Пусть $q \in \mathbb{Z}$ — простое число, и $p \neq q$. Докажите, что все индексы ветвления в разложении идеала $(q) \subset \mathcal{O}$ на простые равны единице.

Задача 11. Обозначим через V группу Гротендика полугруппы выпуклых фигур (=выпуклых компактов в $\mathbb{R}^2$) относительно сложения по Минковскому.

(а) Введите на V структуру вещественного векторного пространства, так чтобы умножение на положительные скаляры $\lambda \in \mathbb{R}^{>0}$ для выпуклых фигур совпадало с результатом гомотетии с коэффициентом λ. Покажите, что функция $A \mapsto \operatorname{area}(A)$ на выпуклых фигурах продолжается до квадратичной формы на V.

(б) Найдите сигнатуру квадратичной формы из пункта (а), ограниченной на n-мерное подпространство, натянутое на n выпуклых фигур.