Задачи к экзамену по квантовой теории поля 30 октября 2014

1. Постройте явные выражения генераторов алгебры Лоренца (бустов и вращений) в пространстве $V^{(1,0)}$.

2. Приведите какое-нибудь решение классического неоднородного уравнения Клейна-Гордона для вещественного скалярного поля

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = j(x),$$

где $j(x)$ — заданная скалярная функция.

3. Введем перестановочную функцию Паули-Йордана соотношением

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = -iD(x-y),$$

где $\hat{\phi}(x)$ — оператор квантованного массивного вещественного скалярного поля.

а) Чему равно значение производной $\left.\dfrac{\partial D(x)}{\partial x^0}\right|_{x^0=0}$?

б) Докажите, что $D(x) = 0$ для любого пространственно подобного $x : x^2 < 0$.

в) Приведите явное выражение $D(x)$ в случае безмассового поля (то есть при $m = 0$).

4. Вычислите следы от произведений гамма-матриц

а) $\mathrm{tr}(\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma_5)$.

б) $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma(1-\gamma_5))$.

в) $\mathrm{tr}(\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^1\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^0\gamma^2\gamma^1\gamma^3\gamma^2\gamma^0\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^2\gamma^3)$.

5. Приведите явное выражение спина классического поля Дирака $\vec{\mathbf{S}}$ в терминах полей ψ, $\bar{\psi}$.

6*. Приведите выражения операторов 4-импульса $\hat{P}_\mu$ и тензора момента импульса $\hat{M}_{\mu\nu}$ в теории свободного массивного вещественного скалярного поля .

а) Вычислите коммутаторы операторов $\hat{P}_\mu$ и $\hat{M}_{\mu\nu}$ и докажите, что они образуют представление алгебры Пуанкаре.

б) Вычислите коммутаторы

$$i[\hat{P}_\mu, \hat{\phi}(x)] \qquad i[\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{\phi}(x)]$$

7*. Рассмотрите нерелятивистскую теорию комплексного скалярного поля с Лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = i\varphi^*(x)\partial_0\varphi(x) - \frac{1}{2}\partial_i\varphi^*(x)\partial_i\varphi(x) + \mu\varphi^*(x)\varphi(x)$$

Какими симметриями обладает данная теория? Какие Нетеровские токи этим симметриям соответствуют? Получите уравнения движения для поля при наличии в системе источников вида

$$\mathcal{L}_s = J(x)\varphi^*(x) + J^*(x)\varphi(x)$$

(то есть для системы с лагранжианом $\mathcal{L}_{\text{tot}} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_s$) и найдите какое-либо их решение.