# Поволоцкий Александр Маркович
# Темы курсовых работ

### 1. Задачи об электроцепях и матричная теорема Кирхгофа. (1-2 курс)

Законы Кирхгофа для электрических цепей, изучаемые в школьном курсе физики, позволяют решать задачи о нахождении токов и напряжений в ребрах и вершинах произвольных графов с произвольными проводимостями ребер. Формальная запись этих законов эквивалентна разностному аналогу уравнения Пуассона, в котором место оператора Лапласа занимает матрица дискретного лапласиана для данного графа. Исследование этого уравнения приводит к замечательным комбинаторным аналогиям, которые предлагается исследовать в порядке возрастания трудности:

1) Теорема Кирхгофа. Показать, что главный минор дискретного Лапласиана даёт число (производящую функцию) остовных деревьев графа.

2) На квадратной решетке существует взаимнооднозначное соответствие между остовными деревьями на чётно-чётной подрешетке и плотными димерными покрытиями (т.е. покрытие решетки молекулами, каждая из которых занимает два соседних.). Вычислить число остовных деревьев на квадратной решетке. Использовать полученный результат для нахождения числа димерных покрытий.

3) Применяя теорему Кирхгофа к квадратной решетке с выломанными ребрами, вычислить вероятность листа остовного дерева а узле решетки (т.е. вероятность того, что данный узел является окончанием ветки дерева), а также вероятность возникновения двух таких листов на заданном расстоянии друг от друга.

Татт У. Теория графов. Пер. с англ. - М.:Мир, 1988, 424 с.
Приезжев В. Б. "Задача о димерах и теорема Кирхгофа" *УФН* **147** 747–765 (1985)

### 2. Марковские цепи, теорема Перрона-Фробениуса и функции больших уклонений аддитивных функционалов (2-4) курс.

Теорема Перрона-Фробениуса (ТПФ) характеризует свойства максимального по модулю собственного значения и соответствующего собственного вектора неприводимой ациклической матрицы с неотрицательными матричными элементами. Важным примером таких матриц являются матрицы переходных вероятностей марковских цепей. В этом случае ТПФ гарантирует существование и единственность стационарного состояния марковской цепи. Более, того небольшая модификация марковской матрицы позволяет придать максимальному собственному значению смысл производящей функции моментов распределения аддитивных функционалов, заданных на траекториях системы, таких, например, как число скачков системы, за время наблюдения. Это позволяет исследовать вероятности больших уклонений величин, задаваемых аддитивными функционалами от их типичных значений.

1) Изучить формулировку и доказательство ТПФ и ее следствия для стационарного сотояния марковских процессов.
2) Пусть частица совершает случайные скачки по периодической решетке, с наперед заданными вероятностями скачков. Найти распределение средней по времени скорости частицы.
3) Пусть по одномерной периодической решетке скачут несколько частиц из предыдущего пункта, которым запрещено встречаться в одном узле. Найти распределение средней по времени скорости частиц (этот пункт требует также изучение техники анзаца Бете).

Гантмахер Ф. Р. Теория матриц
Derrida, Bernard. "An exactly soluble non-equilibrium system: the asymmetric simple exclusion process." *Physics Reports* 301.1 (1998): 65-83.
Stirzaker, G. G. D., & Grimmett, D. (2001). Probability and random processes. *Oxford Science Publications, ISBN 0, 19*(853665), 8.

**3. Теорема Гесселя-Виенно, непересекающиеся пути, взаимодействующие частицы и анзац Бете (1-4 курс)**.

1) На плоской квадратной решетке будем рисовать направленные пути, которые могут идти только вперед и вверх, начинаются на одной диагонали и заканчиваются на другой. Сколько существует вариантов нарисовать N таких путей, если их начальные и конечные точки фиксированы. Решение этой задачи и есть частный случай теоремы Гесселя-Виенно. Каково асимптотическое поведение этого числа, если длина путей стремится к бесконечности?
2) Задача предыдущего пункта может быть поставлена по-другому. Пусть N «недружелюбных пешеходов» блуждают случайным образом по одномерной цепочке, убивая друг друга при встрече. Какова вероятность, начав блуждание в некоторых наперед заданных узлах, выжить за время наблюдения и оказаться в других наперед заданных узлах. Изменение вероятности состояний системы задается матрицей переходных вероятностей. Собственные векторы, её части, соответствующей фиксированному числу пешеходов, оказываются волновыми функциями свободных фермионов --- квантово-механического аналога недружелюбных пешеходов. Получить результаты предыдущего пункта с помощью диагонализации марковской матрицы и убедиться в их эквивалентности.
3) А что если пешеходы не убивают друг друга, а просто отказываются прыгать в занятый узел? В этом случае собственные вектора можно искать в виде анзаца Бете, который является далеко идущим обобщением свободно-фермионных функций. С помощью анзаца Бете вычислить вероятности как для всех частиц, так и для отдельно выбранного среди других пешехода.

Gessel, I. M., & Viennot, X. (1989). Determinants, paths, and plane partitions. *preprint, 132*(197.15).
Brak R., Essam J. W., Owczarek A. L. From the Bethe ansatz to the Gessel-Viennot theorem //Annals of Combinatorics. – 1999. – Т. 3. – №. 2-4. – С. 251-263.
Schütz, G. M. (2001). Exactly solvable models for many-body systems far from equilibrium. *Phase transitions and critical phenomena, 19,* 1-251.

**4. Случайные матрицы (2-4 курс).**

Пусть матричные элементы эрмитовой матрицы случайные величины, мнимые и действительные части которых распределены по нормальному закону. Как распределены собственные значения такой матрицы? То же самое для вещественных симметрических матриц.

Мехта, Случайные матрицы