

Темы курсовых работ

Руководитель А.С.Тихомиров

Темы курсовых работ для студентов бакалавриата

1. Геометрия трехмерной квадрики.

Гладкая трехмерная квадратика Q в проективном пространстве $\mathbb{P}^4$ обладает замечательной геометрией. В частности, база семейства проективных прямых на Q оказывается изоморфной проективному пространству $\mathbb{P}^3 = P(V)$, $\dim V = 4$. Более того, вложение Q в $\mathbb{P}^4$ определяет в базе $\mathbb{P}^3$ семейства проективных прямых на Q нуль-корреляцию, то есть проективный изоморфизм $f : \mathbb{P}^3 \xrightarrow{\sim} (\mathbb{P}^3)^\vee$, индуцированный симплектическим изоморфизмом $\tilde{f} : V \xrightarrow{\sim} V^\vee$. Этой нуль-корреляции соответствует реализация квадрики Q как гиперплоского сечения грассманиана $G(2, V)$, вложенного в пространство $P(\wedge^2 V) \simeq \mathbb{P}^5$ по Плюккеру как гиперквадрика. Эти и другие конструкции предполагается разобрать в курсовой работе.

2. Пространство твисторов для четырехмерной сферы.

Пространство твисторов для четырехмерной сферы S^4 с круговой метрикой g определяется как пространство, параметризующее комплексные структуры в слоях касательного расслоения T_{S^4} , согласованные с метрикой g . Оказывается, это пространство является комплексным многообразием, изоморфным проективному пространству $\mathbb{CP}^3$. Это пространство играет важнейшую роль в дифференциальной геометрии и калибровочной теории, в частности, в описании пространств модулей инстантонов на сфере S^4 . По своей конструкции твисторное пространство обладает гладкой проекцией $\pi : \mathbb{CP}^3 \rightarrow S^4$. Существует красивый способ описания этой проекции через задание антиголоморфной (кватернионной) инволюции $\tau : \mathbb{CP}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{CP}^3$. В курсовой работе предполагается описать геометрическую конструкцию в терминах проективной геометрии пространства $\mathbb{CP}^3$, снабженного инволюцией τ , позволяющую интерпретировать точки твисторного пространства как комплексные структуры в касательных пространствах подлежащих точек на сфере S^4 .

3. Геометрия семейств максимальных линейных подпространств на грассманианах.

Линейные подпространства на грассманианах играют важную роль в различных вопросах алгебраической геометрии, в частности, при описании различных типов векторных расслоений на грассманианах (например, однородных, равномерных, линейно-тривиальных расслоений). При этом оказывается важным описание семейств максимальных линейных подпространств на грассманианах. В курсовой работе предполагается получить такое описание многообразий, параметризующих максимальные линейные подпространства на грассманианах, в терминах флаговых многообразий и диаграмм инциденции.

4. Геометрия семейств максимальных линейных подпространств на ортогональных грассманианах.

Ортогональный грассманиан определяется как многообразие, параметризующее подпространства векторного пространства, снабженного невырожденной квадратичной формой, изотропные относительно этой квадратичной формы. На ортогональном грассманиане, как и на обычном грассманиане, имеются линейные подпространства. В курсовой работе предполагается дать описание многообразий, параметризующих максимальные линейные подпространства на ортогональных грассманианах, в терминах диаграмм инциденции.

5. Геометрия семейств максимальных линейных подпространств на симплектических грассманианах.

Симплектический грассманиан определяется как многообразие, параметризующее подпространства четномерного векторного пространства, снабженного невырожденной йсимплектической формой, изотропные относительно этой симплектической формы. На симплектическом грассманиане, как и на обычном и ортогональном грассманианах, имеются линейные подпространства. В курсовой работе предполагается дать описание многообразий, параметризующих максимальные линейные подпространства на симплектических грассманианах, в терминах диаграмм инциденции.

Темы курсовых работ для студентов магистратуры

1. Инстантоны на сфере S^4 и кватернионы.

Для сферы S^4 с круговой метрикой g рассмотрим g -антиавтодуальные связности на $SU(2)$ -расслоении с фиксированным классом Понтрягина (зарядом) $q \geq 1$ над S^4 , называемые также инстантонами с зарядом q . Существуют точные формулы, использующие кватернионы, позволяющие получить инстантоны из произвольного класса калибровочной эквивалентности, а тем самым, описать пространство $I(q)$ модулей инстантонов с данным зарядом в терминах кватернионов. В курсовой работе предполагается использование этих формул для описания геометрии пространств $I(q)$ с малыми значениями заряда q . Особенно интересны случаи $q = 1$ и 2 .

2. Стабильные векторные расслоения на пространстве $\mathbb{CP}^3$ и инстантоны.

Конструкция Атьи-Уорда через твисторную проекцию $\pi : \mathbb{P}^3 \rightarrow S^4$ устанавливает связь между инстантонами на сфере S^4 и стабильными векторными расслоениями ранга 2 на $\mathbb{P}^3$. Используя эту конструкцию, в курсовой работе предполагается получить описание пространства модулей инстантонов с малым зарядом на S^4 как компоненты множества неподвижных точек вещественной инволюции на пространстве модулей стабильных векторных расслоений с тривиальным детерминантом и вторым классом Черна, равным заряду инстантонов.

3. Связь между инстантонами на сфере S^4 и стабильными векторными расслоениями на $\mathbb{P}^2$.

Пространство модулей $\widetilde{I(n)}$ оснащенных инстантонов с зарядом n на сфере S^4 представляет главное $SO(3)$ -расслоение над пространством модулей $I(n)$ инстантонов на S^4 . Соответственно, пространство $\widetilde{M(n)}$ модулей оснащенных стабильных векторных расслоений на $\mathbb{P}^2$ с классами Черна $c_1 = 0, c_2 = n$ (где оснащение есть выбор базиса в пространстве сечений тривиального ограничения расслоения на фиксированную прямую) является главным $PGL(2, \mathbb{C})$ -расслоением над пространством $M(n)$ модулей стабильных векторных расслоений на $\mathbb{P}^2$. В 1984 г. С. Дональдсон, используя конструкцию Атьи-Уорда, установил изоморфизм $\widetilde{I(n)}$ и $\widetilde{M(n)}$ как вещественных аналитических многообразий. Тем самым, из неприводимости и гладкости пространства $M(n)$ как комплексного многообразия вытекает гладкость и связность пространства $I(n)$ как вещественно-аналитического многообразия. В курсовой работе предполагается получение интерпретации изоморфизма между $\widetilde{I(n)}$ и $\widetilde{M(n)}$ в терминах соответствующего отображения моментов.