Вербицкий Михаил Сергеевич

Темы курсовых работ

2014 – 2015 учебный год

1 курс.

1. Докажите теорему Островского: любая норма на Q эквивалентна архимедовой либо p-адической. Пользуйтесь литературой.

2. "Тело" есть ассоциативная алгебра с делением. Докажите, что конечное тело коммутативно. По возможности, придумайте свое доказательство,

3. Постройте счетное, связное хаусдорфово топологическое пространство. Может ли оно быть компактно? Решение лучше поискать в литературе (Гуглем, например), самостоятельно найти такую штуку будет трудно.

4. Постройте естественную топологию и метрику на группе изометрий метрического пространства. Докажите, что группа изометрий компактного метрического пространства компактна. Это не очень трудная задача, которую можно решить самостоятельно при условии хорошего владения основами топологии и метрической геометрии.

5. Лемма Титце:
Пусть Z - замкнутое подмножество метризуемого пространства M. Докажите, что любая непрерывная вещественнозначная функция f на Z продолжается до непрерывной функции на M. Доказать это можно самостоятельно, пользуясь следующей схемой. Докажите, что супремум набора липшицевых функций липшицев. Предположив, что f липшицева, возьмите множество всех липшицевых функций g на M, ограничение которых на Z не больше f. Докажите, что супремум таких функций существует, и равен f на Z. Чтобы закончить доказательство, постройте метрику на M такую, что f липшицева на Z с метрикой ограничения.

6. Кристаллографическая группа есть группа G движений плоскости, которая содержит Z^2 как подгруппу конечного индекса. Изучите классификацию кристаллографических групп, и опишите топологию всех факторпространств R^2/G. Найдите все кристаллографические группы, которые свободно действуют на R^2.

2 курс.

1. Локально-конечная группа - группа, любая конечно-порожденная подгруппа в которой конечна. Универсальная группа Халла есть локально-конечная группа G, обладающая следующим свойством: для любой конечной группы H, H допускает вложение в G, причем это вложение единственно с точностью до внутреннего автоморфизма. Докажите существование и единственность универсальной группы Халла.

2. Аменабельная группа есть группа G, снабженная инвариантной аддитивной положительной мерой на кольце всех подмножеств (можно считать, что мера G равна 1). Докажите, что Z^n аменабельна, а свободная группа F_n от двух и более образующих не аменабельна. Докажите, что группа, содержащая F_2, не аменабельна.

3. Докажите "альтернативу Титса": если группа Ли не разрешима, она содержит свободную группу F_2. Решение поищите в литературе, если не получается.

4. Определим группу, свободно порожденную классами конгруэнтных треугольников на плоскости Лобачевского, и профакторизуем по соотношению A = \sum A_i, если треугольник A разбит в объединение треугольников A_i, пересекающихся по границам. Найдите, какая группа получится.

5. Пусть на кольце Q рациональных чисел задана метрика d, причем сложение и умножение непрерывны в d, а пополнение Q по d связно и локально компактно. Докажите, что эта метрика задает вещественную топологию.

6. Постройте нетривиальное комплексно-аналитическое отображение из $\C^2$ в $\C^2\backslash \Z^4$. Пользуйтесь статьей Баззарда и Лу: http://arxiv.org/abs/math/9903193, "Algebraic surfaces holomorphically dominable by C^2".

7. Докажите неравенство Бишопа-Громова: на римановом многообразии с кривизной Риччи, которая ограниченна константой C, риманов объем шара радиуса R ограничен римановым объемом шара разиуса R в пространстве постоянной кривизны с кривизной Риччи C. Литература: Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, Jacques Lafontaine, Riemannian Geometry.

8. Изучите доказательство 5-й проблемы Гильберта по книге "Hilbert's fifth problem and related topics". http://terrytao.files.wordpress.com/2012/03/hilbert-book.pdf Запишите его. Освойте методы, используемые в этой книге.

9. Постройте диффеоморфизм окружности, который не является экспонентой векторного поля, или докажите, что их нет.

%%

3-4 курс и магистратура.

1. Если вы не знаете определение орбиобразия, найдите в литературе. Определите неразветвленное накрытие орбиобразий. Найдите все двумерные орбиобразия, не допускающие неразветвленных, гладких накрытий (указание: все они рода 0 и 1). Решение этой задачи можно поискать в Гугле, спросить у кого-нибудь, либо сделать самостоятельно.

2. Пусть G -- компактная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой g_0. Решите уравнение потока Риччи $g_t' = - 2\Ric(g_t)$ в классе левоинвариантных метрик. Найдите, к чему сходится. Это не новый результат, а скорее тренировочная задача для студента, желающего освоить риманову геометрию.

3. Плоское аффинное многобразие есть фактор открытого подмножества U в R^n по дискретной группе аффинных преобразований. Геодезическая плоского аффинного многобразия есть образ прямой из U. Докажите, что каждое плоское аффинное компактное многобразие содержит плотную геодезическую. Ответ на этот вопрос мне неизвестен, и науке, похоже, тоже неизвестен, хотя во всех примерах задача делается.

4. Комплексное нильмногообразие есть фактор нильпотентной группы Ли, снабженной левоинвариантной комплексной структурой, по дискретной кокомпактной подгруппе. Постройте комплексное нильмногообразие, которое не имеет нетривиальных комплексных подмногообразий, и не изоморфно тору. Этот результат науке неизвестен, и его можно опубликовать.

5. Пусть S -- целая кривая в компактном комплексном многообразии, то есть голоморфный образ C. Рассмотрим гладкую 2-форму, проинтегрируем ее по диску в S, и поделим на объем диска. Докажите, что частное сходится при стремлении радиуса диска к бесконечности, и задает поток, который не зависит от выбора дисков. Этот поток называется потоком Альфорса. Докажите, что он замкнут. Можно пользоваться литературой (гуглите "Ahlfors current"), но она не очень помогает, потому что эта наука нигде толком не изложена.

6. Теория Макдафф-Полтеровича описывает симплектические упаковки в терминах симплектических раздутий. Определите взвешенное симплектическое раздутие, специальный дивизор которого - не CP^n (как в случае обычных раздутий), а взвешенное CP^n. Докажите аналог теории Макдафф-Полтеровича для взвешенных раздутий: симплектические упаковки симплектическими эллипсоидами с рациональными соотношениями полуосей описываются в терминах симплектического конуса взвешенных раздутий многообразия. Изучите упаковки эллипсоидами в простых примерах (тор, проективное пространство, K3-поверхность).
Это все науке неизвестно (или малоизвестно), и может быть опубликовано.