Алгебра II, осенний семестр 2014 г.

Решение домашнего задания 5.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Является ли неприводимым в кольце $\mathbb{Z}[x]$ многочлен
$$x^5+8x^4+13x^3+10x^2+5x+4?$$

Решение. Многочлен удовлетворяет критерию Шёнеманна при $p=3$ и $a=-1$:
$$x^5+8x^4+13x^3+10x^2+5x+4=(x+1)^5+3(x^4+x^3+1)=(x+1)^5+3F(x),$$
$F(-1)\neq 0$. Значит, многочлен неприводим.

Задача 2. Является ли неприводимым в кольце $\mathbb{C}[x,y]$ многочлен
$$x^3y^2-x^4-2x^3y+x^3-y+1?$$

Решение. Рассмотрим исходный многочлен, как многочлен от x с коэффициентами в $\mathbb{C}[y]$:
$$x^3y^2-x^4-2x^3y+x^3-y+1=-x^4+(y-1)^2x^3-(y-1).$$
Многочлен $y-1$ является неприводимым в $\mathbb{C}[y]$. Для элемента $p=y-1$ выполнены условия признака Эйзенштейна, поэтому многочлен неприводим.

Задача 3. Докажите, что 2 является неприводимым, но не простым элементом в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ для всех целых $d\leq -3$.

Решение. Докажем неприводимость от противного. Обозначим $-d$ через c, тогда $c\geq 3$. Пусть 2 — приводимый элемент в $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Тогда
$$(a_1+ib_1\sqrt{-c})(a_2+ib_2\sqrt{-c})=2.$$
Запишем равенство норм этих чисел.
$$(a_1^2+b_1^2c)(a_2^2+b_2^2c)=4$$
Так как a_1,b_1,a_2,b_2,c — целые числа и $c\geq 3$, один из множителей $(a_j+ib_j\sqrt{c})$ имеет норму 1, то есть обратим в $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, что противоречит приводимости.

Докажем, что 2 не является простым элементом в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Элемент прост, если идеал, порожденный им прост. Это значит, что если $ab\in I$, то либо $a\in I$, либо $b\in I$. Рассмотрим идеал (2), порожденный 2.

Пусть c — нечетное. Тогда $1+c=(1+i\sqrt{c})(1-i\sqrt{c})\in(2)$, но $(1+i\sqrt{c})\notin(2)$ и $(1+i\sqrt{c})\notin(2)$. Значит, 2 не является простым элементом.

Пусть c — четное. Тогда $4+c=(2+i\sqrt{c})(2-i\sqrt{c})\in(2)$, но $(2+i\sqrt{c})\notin(2)$ и $(2+i\sqrt{c})\notin(2)$. Значит, 2 не является простым элементом.

Задача 4. Докажите, что квадратная матрица с коэффициентами в коммутативном кольце R обратима тогда и только тогда, когда её определитель обратим в кольце R.

Решение. Пусть A — обратимая матрица, то есть $A\cdot A^{-1}=E$. Из этого следует $\det A\cdot\det A^{-1}=1$, значит, $(detA)^{-1}=detA^{-1}$, то есть определитель обратим.

Обратно, пусть определитель обратим. Тогда рассмотрим присоединненную матрицу C — матрицу, составленную из алгебраических дополнений A. Тогда $C^T(\det A)^{-1}$ будет обратной матрицей.

Задача 5. Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$ такой многочлен, что $f(a)$ является простым числом для бесконечного множества целых a. Докажите, что f неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

Решение. Докажем от противного. Пусть $f(x) = g(x)h(x)$.

Тогда $f(a) = g(a)h(a)$ — простое число. Значит, либо $g(a) = \pm 1$, либо $h(a) = \pm 1$. Количество таких чисел a, что $g(a) = 1$ равно числу корней многочелна $g(x) - 1 = 0$, то есть их либо конечное число, либо многочлен $g(x)$ тождественно равен 1. Но мы предполагали приводимость, то есть $\deg g(x) > 0$ и $\deg h(x) > 0$. Противоречие.