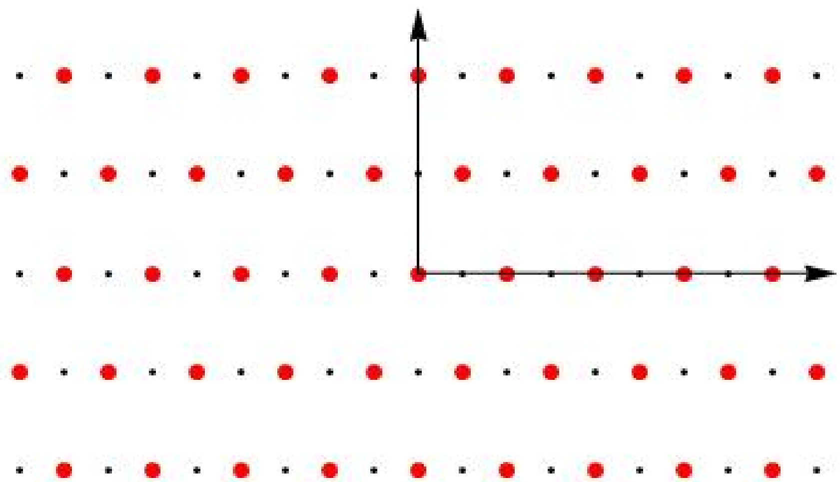

Рис. 1. Задача 3: решётка целых и неглавный идеал (выделен красным)

Алгебра II, осенний семестр 2014г.
Решения домашнего задания 6.
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите группу Гротендика полугруппы в $\mathbb{Z}$, порожденной числами 3 и 5.

Решение: Пусть G - полугруппа, G^* - ее группа Гротендика. Так как $3, 5 \in G^*$, то $3 + 3 = 6 \in G^*$, $6 - 5 = 1 \in G^*$, $5 - 6 = -1 \in G^*$. Следовательно, $G^* = \mathbb{Z}$.

Задача 2. Нарисуйте кольцо целых квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ как решетку на комплексной плоскости. Приведите пример неглавного идеала в этом кольце.

Решение: Пусть $O[\mathbb{Q}(\sqrt{-5})]$ - кольцо целых квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Любой элемент $O[\mathbb{Q}(\sqrt{-5})]$ - корень уравнения $x^2 + bx + c = 0, b, c \in \mathbb{Z}$, который имеет вид $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2} = \frac{k+m\sqrt{-5}}{2}, k, m \in \mathbb{Z}$. Заметим, что $k + m$ - четно, иначе $\frac{1}{2}$ или $\frac{\sqrt{-5}}{2} \in O[\mathbb{Q}(\sqrt{-5})]$, что, очевидно, неверно. Если же существуют такие нечетные k, m, что $\frac{k+m\sqrt{-5}}{2}$ - целое алгебраическое, то $\frac{1+\sqrt{-5}}{2}\frac{1-\sqrt{-5}}{2} = \frac{3}{2}$, что неверно, поэтому $O[\mathbb{Q}(\sqrt{-5})] = \mathbb{Z}(\sqrt{-5})$.

В качестве неглавного идеала рассмотрим идеал порожденный $(2, 1 + \sqrt{-5})$. Это все элементы вида $\frac{k+m\sqrt{-5}}{2}$, где $k+m$ - четное. Заметим, что элементом вида $c \in \mathbb{Z}$ или $d\sqrt{-5}$ он не порождается. Не порождается этот идеал и элементом вида $k + m\sqrt{-5}$ так, как стандартная норма этого элемента $N(k + m\sqrt{-5}) = k^2 + 5m^2 \geq 6$, а норма элемента 2 равна 4.

Задача 3. Докажите, что кольцо целых квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ является евклидовым относительно нормы квадрат модуля.

Решение: Пусть $O[\mathbb{Q}(\sqrt{-7})]$ - кольцо целых квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$. Любой элемент $O[\mathbb{Q}(\sqrt{-7})]$ - корень уравнения $x^2 + bx + c = 0, b, c \in \mathbb{Z}$, который имеет вид $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2} = k + m\sqrt{-7}, k, m \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $2k, 2m \in \mathbb{Z}$. Заметим, что для целого элемента $k+m\sqrt{-7}$, $k+m \in \mathbb{Z}$. Также несложно заметить, что $\frac{1+\sqrt{-7}}{2}$ - корень уравнения x^2-x+2, поэтому $O[\mathbb{Q}(\sqrt{-7})] = \mathbb{Z}(\frac{1+\sqrt{-7}}{2})$.

Докажем, что кольцо евклидово. Посмотрим на подрешетку, порожденную вектором b и $b(\frac{1+\sqrt{-7}}{2})$. Тогда нам достаточно показать, что для любого комплексного числа z найдется c из решетки такое, что $|z-c| < b$. Для этого уменьшим решетку в b раз и повернем на угол $-arg(b)$. Теперь покажем, что для любого комплексного числа z найдется α из решетки, такое что $|z-\alpha| < 1$. Решетка получается треугольная, со сторонами треугольников $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1$. Расстояние от точки z до ближайшей точки не превышает радиуса описанной окружности, так как треугольники остроугольные. Радиус описанной окружности равен $2/\sqrt{7} < 1$. Следовательно, кольцо евклидово.

Задача 4. Найдите все целые алгебраические числа в поле $\mathbb{Q}(\alpha)$, где $\alpha = \sqrt[3]{10}$ — вещественный кубический корень из десяти.

Решение: Все элементы $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{10})$ имеют вид $a+b\sqrt[3]{10}+c\sqrt[3]{100}$. Запишем оператор умножения на $a+b\sqrt[3]{10}+c\sqrt[3]{100}$ в базисе $(1, \sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{100})$:

$$A = \begin{pmatrix} a & 10c & 10b \\ b & a & 10c \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен A - минимальный многочлен для $a+b\sqrt[3]{10}+c\sqrt[3]{100}$, если $b \neq 0, c \neq 0$:

$$det(A-\lambda E) = -x^3 + 3ax^2 - (3a^2 - 30bc)x + a^3 + 10b^3 + 100c^3 - 30abc.$$

Если $a+b\sqrt[3]{10}+c\sqrt[3]{100}$ - целое алгебраическое, то

$$3a \in \mathbb{Z}$$

$$3a^2 - 30bc \in \mathbb{Z}$$

$$a^3 + 10b^3 + 100c^3 - 30abc \in \mathbb{Z}$$

Теперь несложно показать, что $3b \in \mathbb{Z}$ и $3c \in \mathbb{Z}$, а также $a-b \in \mathbb{Z}$ и $a-c \in \mathbb{Z}$.

Задача 5.Докажите, что все полугруппы в $\mathbb{Z}$ конечно порождены.

Решение: Если в полугруппе есть положительный элемент a и отрицательный элемент b, то a, b - обратимы, потому что $a|b| + b|a| = 0$, $-a = a(|b|-1) + b|a|$, $-b = a|b| + b(|a|-1)$. То есть в полугруппе есть нейтральный элемент и 0, следовательно, это группа, а в $\mathbb{Z}$ все подгруппы - множества вида $k\mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$. Они как полугруппы порождаются двумя элементами k и $-k$.

Если все элементы неотрицательны(случай всех неположительных - аналогичен), возьмем любые два элемента k_1 и k_2, пусть $\alpha_2 = (k_1, k_2)$. Если находится элемент k_3 не кратный α_2, то мы добавляем его в набор, и $\alpha_3 = (k_1, k_2, k_3)$, при этом $\alpha_3 < \alpha_2$. В конце получим набор $(k_1, \dots k_n)$, $\alpha = (k_1, \dots k_n)$. Пусть $k_i = c_i\alpha$.

Покажем, что существует такое M, что $m > M$ $\beta_1, \dots \beta_n \in \mathbb{N}$ $\beta_1 c_1 + \dots \beta_n c_n = m$. Достаточно показать для $M+1 < m < M + c_1$. По теореме о линейном представлении НОД существуют $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{Z}$, что $\gamma_1 c_1 + \dots \gamma_n c_n = 1$. Возьмем $M = (c_1+1)((|\gamma_1|+1)c_1 + \dots (|\gamma_n|+1)c_n)$. Тогда прибавление 1 - прибавление $\gamma_1 c_1 + \dots \gamma_n c_n$ Если прибавление производится не более c_1 раз, то все коэффициенты останутся положительными, то есть все элементы больше M - линейные комбинации $c_1, \dots, c_n$.

Таким образом, все элементы кратные α и больше M лежат в полугруппе, порожденной $k_1, \ldots k_n$. Осталось добавить конечное число элементов, если они не порождаются $k_1, \ldots k_n$.