Алгебра II, осенний семестр 2014 г.

Решение домашнего задания 3.

Задача 1. Найдите сумму чисел, обратных комплексным корням многочлена
$$3x^3 + 2x^2 - 1.$$

Решение: Пусть x_1, x_2, x_3 - комплексные корни многочлена $3x^3 + 2x^2 - 1$.
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3}{x_1x_2x_3}.$$
По теореме Виета:
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{0}{3} = 0$$
$$x_1x_2x_3 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: 0.

Задача 2. Для каких простых чисел p многочлены $x^3 - 3x^2 + 1$ и $2x^4 - 5x^2 - x - 1$ имеют общий корень в поле $\mathbb{F}_p$ из p элементов?

Решение: Если у многочленов $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ и $g(x) = 2x^4 - 5x^2 - x - 1$ есть общий корень в каком-нибудь расширении поля $\mathbb{F}_p$, то $\mathrm{Res}(f, g) = 0$. Найдем $\mathrm{Res}(f, g)$:
$$\mathrm{Res}(f,g) = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -5 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 543 = 3 \cdot 181$$
Таким образом, общий корень в $\mathbb{F}_p$ может быть только при $p = 3$ и $p = 181$. При $p = 3$ такой корень действительно легко угадать, он равен -1. При $p = 181$ угадать корень сложнее, зато можно с помощью алгоритма Евклида в кольце $\mathbb{F}_{181}[x]$ найти НОД(f, g), который окажется (с точностью до умножения на элемент из $\mathbb{F}_{181}$) линейным многочленом $x - 59$. Поэтому общий корень в $\mathbb{F}_{181}$ существует и равен 59.

Ответ: $p = 3$, $p = 181$.

Задача 3. Для какого наименьшего натурального числа n существуют такие многочлены $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, что в кольце многочленов $\mathbb{Z}[x]$ выполнено тождество
$$(x^3 + x + 1)f(x) + (3x^2 + 2)g(x) = n?$$

Решение: Воспользуемся алгоритмом Евклида для нахождения НОД многочленов. Вычислениея будем проводить в кольце многочленов $\mathbb{Q}[x]$.
$$x^3 + x + 1 = (3x^2 + 2)\left(\frac{1}{3}x\right) + \left(\frac{1}{3}x + 1\right)$$
$$3x^2 + 2 = \left(\frac{1}{3}x + 1\right)(9x - 27) + 29$$

$$29 = (3x^2+2) - \left(\frac{1}{3}x+1\right)(9x-27) = (3x^2+2) - (9x-27)\left((x^3+x+1) - (3x^2+2)\left(\frac{1}{3}x\right)\right)$$

Получаем равенство справедливое и в $\mathbb{Z}[x]$:

$$29 = (x^3+x+1)(27-9x) + (3x^2+2)(3x^2-9x+1)$$

Докажем, что n не может быть меньше 29. Подставим в тождество $x=-3$.

$$((-3)^3 - 3 + 1)f(-3) + (3\cdot(-3)^2+2)g(-3) = n$$

$$-29f(-3) + 29g(x) = n,$$

то есть n делится на 29.

Ответ: 29.

Задача 4. Найдите сумму k-тых степеней корней многочлена

$$x^n + \frac{x^{n-1}}{1!} + \frac{x^{n-2}}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

для всех $k \le n$.

Решение: Пусть $f(x) = x^n + \frac{x^{n-1}}{1!} + \frac{x^{n-2}}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, а $x_1, \ldots, x_n$ — его корни. По теореме Виета мы знаем элементарные симметрические функции от корней многочлена

$$\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Воспользуемся тождеством Ньютона

$$k\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}p_i(x_1, \ldots, x_n)\sigma_{k-i},$$

связывающим элементарные симметрические функции $\sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$ и степенные суммы $p_m = \sum_{j=1}^{n} x_j^m$.

$$p_1 = \sigma_1 = -1$$

$$2\sigma_2 = \sigma_1 p_1 - p_2$$

Методом математической индукции докажем, что $p_m = 0$ для $m \ge 2$.

1.База: $m = 2$.

$$p_2 = 2\cdot\frac{(-1)^2}{2} - 1 = 0$$

2.Пусть $p_m = 0$ при $m \le k$. Докажем для $m = k+1$.

$$(k+1)\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} = -\frac{(-1)^k}{k!} + 0 + \ldots + 0 + (-1)^k \cdot p_{k+1} \Rightarrow p_{k+1} = 0$$

Задача 5. Определим многочлен $h_i(x_1, \ldots, x_n)$ формулой

$$h_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_i \le n} x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_i}.$$

Докажите, что каждый симметрический многочлен $x_1, \ldots, x_n$ является многочленом от $h_1, \ldots, h_n$.

Решение: Многочлен h_k равен коэффициенту при t^k у формального степенного ряда $H(t) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n][[t]]$, который появляется при перемножении n бесконечных геометрических прогрессий

$$H(t) = \prod\nolimits_i \frac{1}{1 - x_i t} = \prod\nolimits_i (1 + x_i t + x_i^2 t^2 + \ldots) = \sum_{k \geq 0} h_k(x) \cdot t^k.$$

Справедливо равенство $H(t)E(-t) = 1$, где $E(-t) = \prod_i (1 - x_i t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma_k(x) t^k$. Вычислим коэффициент при t^k, пользуясь данным равенством:

$$(-1)^k \sigma_k = h_k - h_{k-1}\sigma_1 + h_{k-2}\sigma_2 - h_{k-3}\sigma_3 + \ldots + (-1)^{k-1} h_1 \sigma_{k-1}.$$

То есть каждый элементарный симметрический многочлен σ_k выражается через $h_1, \ldots, h_n$, и элементарные многолчены σ_l, где $l < k$, откуда по индукции по k следует, что он выражается только через $h_1, \ldots, h_n$. Комбинируя это с основной теоремой о симметрических многочленах, получаем, что каждый симметрический многочлен от $x_1, \ldots, x_n$ является многочленом от $h_1, \ldots, h_n$.