Решения домашнего задания 4.

Задача 1. Найдите многочлен четвёртой степени, корнями которого являются кубы комплексных корней многочлена

$$x^4 - x - 1.$$

Решение. Введем обозначение обозначение $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — корни исходного многочлена. Используя подстановку $t = x^3$, можно записать выражение для многочлена таким образом, :

$$\prod_{i=1}^{4}(t - a_i) = (x^3 - a_1^3)(x^3 - a_2^3)(x^3 - a_3^3)(x^3 - a_4^3) = \prod_{j=1}^{4}(x - a_j)(x - \zeta a_j)(x - \zeta^2 a_j) =$$

$$= (x^4 - x - 1)(\zeta x^4 - \zeta x - 1)(\zeta^2 x^4 - \zeta^2 x - 1) = (x^{12} - 3x^9 + 3x^6 - x^3 - 1) = (t^4 - 3t^3 + 3t^2 - t - 1)$$

Ответ: $t^4 - 3t^3 + 3t^2 - t - 1$.

Задача 2. Дана 3×3-матрица A, и известно, что $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^2 = \operatorname{tr} A^3 = 3$. Найдите характеристический многочлен матрицы A.

Решение. Заметим, что сопряжения не меняют след матрицы, поэтому можно считать что матрица приведена к ЖНФ, а в таком случае значение имеют только диагональные элементы матрицы, обозначим их (a_1, a_2, a_3). В таком случае $trA^k = a_1^k + a_2^k + a_3^k$, а характеристический многочлен:

$$\chi(x) = x^3 - (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3)x - a_1a_2a_3$$

Задача сводится к выражению элементарных симметрических многочленов через многочлены Ньютона:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 = \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{2} = 3$$

$$a_1a_2a_3 = \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^3 - 3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(a_1 + a_2 + a_3) + 2(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)}{6} = 1$$

Ответ:

$$\chi(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$$

Задача 3. Вычислите дискриминант многочлена $x^n - 1$.

Решение. Корни многочлена — это ζ^k, где $0 \le k < n$ и $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Тогда дискриминант:

$$D = \prod_{k<j}(\zeta^k - \zeta^j)^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k \ne j}(\zeta^k - \zeta^j) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}(\zeta^k - \zeta^{k+j}) =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=0}^{n-1}\zeta^k \prod_{j=1}^{n-1}(1 - \zeta^j) == (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{n-1} \left(\prod_{j=1}^{n-1}(1 - \zeta^j)\right)^n =$$

$$= (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} \left.(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1)^n\right|_{x=1} = (-1)^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}} n^n$$

Ответ: $(-1)^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}} n^n$.

Задача 4. Исключите y из системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^3 = 0 \\ x^3 - xy + y^2 = 0. \end{cases}$$

Решение 1. Домножая многочлены на элементы $\mathbb{R}[x]$ и вычитая их друг из друга, получим:

$$(y^3 - xy + x^2) - y(y^2 - xy + x^3) = xy^2 - (x + x^3)y + x^2 = 0$$
$$xy^2 - (x + x^3)y + x^2 - x(y^2 - xy + x^3) = y(x^2 - x - x^3) + x^2 - x^4 = 0$$

Тем самым мы понизили степень по y у одного из уравнений

$$\begin{cases} y(x^2 - x - x^3) + x^2 - x^4 = 0 \\ x^3 - xy + y^2 = 0. \end{cases}$$

Продолжаем исключать y:

$$(x^2 - x - x^3)(y^2 - xy + x^3) - y(y(x^2 - x - x^3) + x^2 - x^4) = y(2x^4 - x^3) + x^3(x^2 - x - x^3) = 0$$
$$(x^2 - x - x^3)(y(2x^4 - x^3) + x^3(x^2 - x - x^3)) - (2x^4 - x^3)(y(x^2 - x - x^3) + x^2 - x^4) = x^9 + 2x^7 - 4x^6 + 2x^5 = 0$$

Ответ: $x^9 + 2x^7 - 4x^6 + 2x^5 = 0$.

Решение 2. Рассмотрим оба многочлена как многочлены от y с коэффициентами в $\mathbb{R}[x]$ и найдём их результант с помощью матрицы Сильвестра:

$$\operatorname{Res}(y^3 - xy + x^2, y^2 - xy + x^3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x & x^2 \\ 1 & -x & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x & x^3 \end{pmatrix} = x^9 + 2x^7 - 4x^6 + 2x^5.$$

Поскольку многочлены имеют общий корень, только если их результант равен нулю, получаем, что если (x_0, y_0) — решение исходной системы, то x_0 — корень результанта. Тем самым, уравнение $x^9 + 2x^7 - 4x^6 + 2x^5 = 0$ следует из исходной системы.

Задача 5. Пусть f и g — многочлены от одной переменной. Докажите, что $D(fg) = D(f)D(g)\operatorname{Res}^2(f, g)$.

Решение. Пусть многочлены f и g имеют корни $f_1, ..., f_n$ и $g_1, ..., g_m$, а p и q старшие коэффициенты, соответственно. Корни многочлена fg это объединение множеств корней f и g (с учётом кратностей), тогда по определению:

$$D(f)D(g)\operatorname{Res}^2(f, g) =$$
$$= p^{2n-2}\left(\prod_{1\le i<j\le n}(f_i - f_j)^2\right) q^{2m-2}\left(\prod_{1\le i<j\le m}(g_i - g_j)^2\right) p^{2m}q^{2n}\left(\prod_{1\le i\le n, 1\le j\le m}(f_i - g_j)^2\right) =$$
$$= (pq)^{2(n+m)-2}\left(\prod_{1\le i<j\le n}(f_i - f_j)^2\right)\left(\prod_{1\le i<j\le m}(g_i - g_j)^2\right)\left(\prod_{1\le i\le n, 1\le j\le m}(f_i - g_j)^2\right) = D(fg)$$